

MODELAGEM DE MARKOWITZ PARA DETERMINAR PORTFÓLIO DE INVESTIMENTO EM ACADEMIAS DE GINÁSTICA

BRASIL, Roxana Macedo¹; JUNIOR, Homero da Silva Nahum^{2,3}; BRITO, Diogo de Freitas^{2,4}; BARRETO, Ana Cristina Lopes y Glória².

247

Resumo

O estudo teve por objetivo selecionar academias de ginástica para receberem investimento de forma equilibrada com o retorno. Avaliadas foram 12 unidades situadas no sudeste brasileiro, considerando número de matrículas, demanda na região, custo de aquisição, espaço existente, estimativa de receita, grau de fidelidade do cliente, retorno e risco. Utilizou-se o modelo de Markowitz implementado no RStudio 2022.07.1. Como resultados foram selecionadas sete unidades, cujo conjunto deteve Risco médio = 31,31 pontos, com atendimento de 7.666 clientes da Demanda existente e Receita Total = R\$5.286.677,00. Concluiu-se que o objetivo foi alcançado satisfatoriamente.

Palavras-chave: Pesquisa operacional. Administração. Planejamento. Negócio. Economia.

Abstract

The aim of the study was to select fitness centres for investment in a way that is balanced with return. Twelve gyms located in south-eastern Brazil were evaluated, taking into account the number of enrolments, demand in the region, acquisition cost, existing space, estimated revenue, degree of customer loyalty, return and risk. The Markowitz model implemented in RStudio 2022.07.1 was used. As a result, seven units were selected, with an average risk = 31.31 points, serving 7,666 customers from existing demand and total revenue = R\$5,286,677.00. It was concluded that the objective was satisfactorily achieved.

Keywords: Operational research. Administration. Planning. Business. Economy.

Introdução

Processo Estocástico (PE) seria o conjunto de variáveis aleatórias indexadas no tempo (t), mas poderia ser no espaço, capaz de descrever a evolução de determinado fenômeno sobre o qual se imporia a aleatoriedade (Jandre *et al.*, 2024; Akkari, 2019; Hillier e Lieberman, 2013), cuja expressão matemática geral seria (Ross, 1996):

$$\{X_t\}_{t \in T}$$

¹ Docente Ph.D. em Educação Física;

² Docentes do Curso de Educação Física do Centro Universitário Celso Lisboa;

³ Docente da Escola de Saúde da Universidade Cândido Mendes;

⁴ Docente do Curso de Gestão Desportiva e do Lazer do Centro Universitário Celso Lisboa.

Onde: X_t seria uma variável aleatória $\forall t \in T, T = \mathbb{N}$.

Pelo exposto, os fenômenos estocásticos poderiam ser contínuos ou discretos no tempo. O primeiro caso seria essencialmente um processo de Poisson ($\{X_t\}t \geq 0$), enquanto o segundo conhecido seria por passeio aleatório ($\{X_n\}n \in \mathbb{N}$), os quais permitiriam a generalização da formulação matemática, tendo termos determinístico (a) e estocástico (b), logo resultaria em:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$$

Na área de saúde, o PE poderia ser utilizado em estudos de disseminação de doenças para prever picos de infecção e, conseqüentemente planejar alocação de recursos (insumos, capital humano e estruturas, por exemplo) em unidades de saúde, o que demandaria a modelagem por cadeia de Markov em tempo contínuo (Keeling e Rohani, 2008; Øksendal, 2003), possibilitando estimar a probabilidade de evolução pelos estados da doença, por exemplo óbito, recuperado, infectado e suscetível, o que seria expresso por:

$$P_{ij}(t) = P(X_t = j | X_0 = i)$$

Onde: $P_{ij}(t)$, probabilidade de transição do estado i ao j no tempo t .

Em negócios, o PE seria empregado em prospecção de cenários de risco e otimização de carteiras de investimento, como na evolução dos preços de ações, cuja aleatoriedade seria influenciada pelo noticiário econômico ou climático, demanda de mercado e contexto geopolítico. Portanto, carecendo de modelagem pelo movimento browniano geométrico (Hull, 2021; Øksendal, 2003), comumente empregado na precificação de opções, especialmente pelo modelo de Black-Scholes (Fuentes, 2004; Sukhomlin, 2001), tendo por expressão matemática:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Onde: S_t seria o preço da ação no tempo t ; μ , a taxa de retorno esperada; σ , a volatilidade; W_t , o movimento browniano padrão (processo de Wiener).

O modelo de Markowitz objetivou otimizar carteiras de investimento, combinando ativos cujos retornos carecessem de correlação perfeita, o que reduziria o risco total do portfólio. Esse seria o conceito de diversificação. Assim, a otimização seria conquistada pelo equilíbrio entre 1) Retorno Esperado, dado pela média ponderada dos retornos de cada ativo (I); e Risco, esse estimado pela variância dos retornos em razão da covariância das unidades (II); e essa estabeleceria como pares de ativos se comportariam (III), cuja normalização originaria a correlação (Markowitz, 1952).

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot E(R_i) \quad (I)$$

Onde: $E(R_p)$ seria o retorno esperado do portfólio; w_i , a proporção do recurso alocado no ativo; e $E(R_i)$, o retorno esperado do ativo i .

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \cdot w_j \cdot \text{cov}(R_i, R_j) \quad (II)$$

Onde: σ_p^2 , a variância do portfólio (risco); w_i e w_j , as proporções dos recursos alocados nas unidades; e $\text{cov}(R_i, R_j)$, a covariância entre os retornos das unidades.

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \quad (III)$$

Onde: ρ_{ij} , o coeficiente de correlação entre as unidades; e σ_i e σ_j , os desvios padrão das unidades.

Então, a otimização do problema (IV) seria conquistada pelas estimativas de pesos (w_i) que minimizassem o risco, dado determinado retorno esperado (μ). A solução poderia ser obtida pelo uso de multiplicadores de Lagrange (V), ou seja, derivando em relação a w , λ_1 e λ_2 , o desfecho seria a obtenção dos pesos ótimos organizados em um sistema linear (Elton e Gruber, 1995; Merton, 1972).

Com isso surgiu o conceito de fronteira ou conjunto eficiente, que seria a região com os portfólios detentores das maiores eficiências para determinado risco, em outras palavras,

a curva na qual residiriam as melhores combinações de ativos para cada nível de risco assumido, enriquecendo a substancialidade do conceito de diversificação, o qual preconizaria, semanticamente, espalhar investimentos em distintos ativos (Markowitz, 1959). Contemporaneamente, a diversificação seria ponto pacífico em negócios e no mercado financeiro (Vieira e Mendes, 2022; Camargo e Arteaga, 2022; Lima, 2021; Silva et al., 2021; Villca, 2020; Climent-Serrano e Perelló-Fons, 2020; Gonzalez e Vazquez, 2020; Roma, Iquiapaza e Ferreira, 2015; Bodie, Kane e Marcus, 2014).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \sigma_p^2 = w^T \Sigma w \\ \text{Sujeito a:} \\ w^T E(R) = \mu \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ w_i \geq 0 \end{array} \right\} \quad (IV)$$

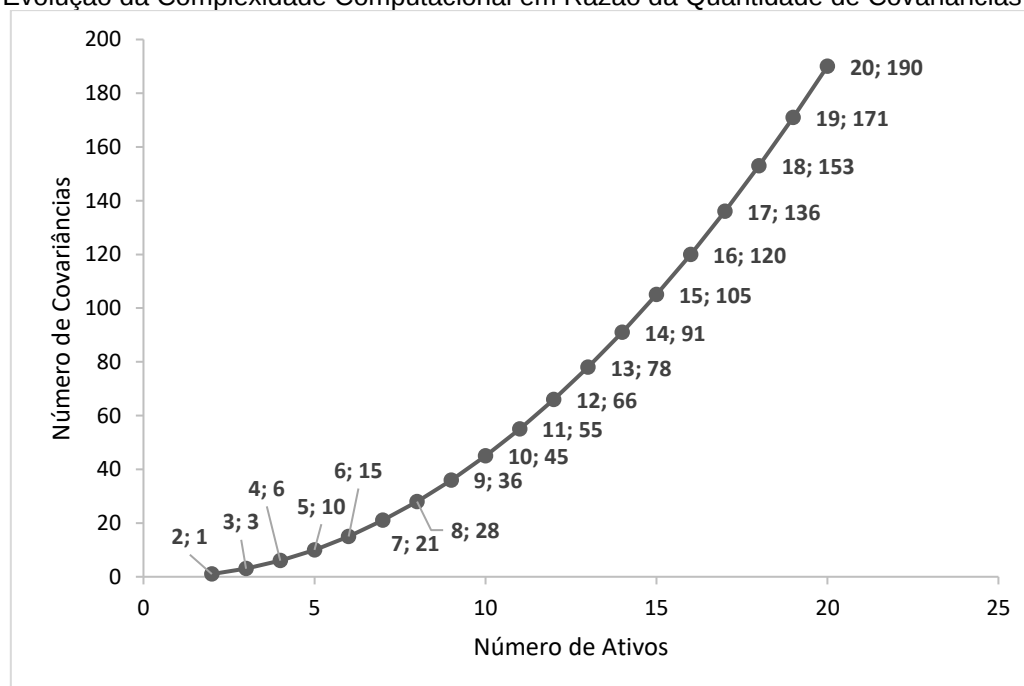
Onde: $E(R)$, vetor dos retornos esperados dos ativos; w , vetor dos pesos; Σ , matriz quadrática de covariância; a última restrição seria opcional; a penúltima restrição faria referência ao orçamento.

$$\mathcal{L} = w^T \Sigma w + \lambda_1 (\mu - w^T E(R)) + \lambda_2 \left(1 - \sum_{i=1}^n w_i \right) \quad (V)$$

Compreender-se-ia, o modelo de Markowitz como PE, porque 1) os retornos dos ativos (R_i) seriam variáveis aleatórias com média $E(R_i)$ e variância σ_i^2 , logo os valores futuros seriam desconhecidos e probabilísticos; 2) a volatilidade dos retornos seria estimada pela variância, estatística representativa da dispersão aleatória nos mercados; 3) a covariância estimaria o comportamento estocástico de pares de ativos, ou melhor, a interdependência estocástica deles; 4) a modelagem do fenômeno se alicerçaria em expectativas matemáticas e distribuições de probabilidade, por isso a fronteira eficiente seria baseada em retornos futuros imprevisíveis (não identificados antecipadamente), porém estimáveis (calculáveis), não obstante, a solução seria determinística (Merton, 1972; Markowitz, 1959; Markowitz, 1952).

O desenvolvimento da modelagem requisitaria dados passados para estimar os retornos esperados e a covariância, todavia não haveria garantia de repetição daqueles dados. Essa seria a limitação recorrente nas implementações de modelos de predição. Adicionalmente, a presunção de normalidade sobre os retornos tenderia a ignorar as diversas influências externas, e o número de ativos elevaria rapidamente a quantidade de covariâncias a serem estimadas (Figura 1), o que favoreceria o comprometimento do custo computacional (Costa, 2023; Lima, 2021). Então, com base no exposto, o estudo objetivou desenvolver um modelo de Markowitz para formar o portfólio para investimento em unidades de academia de ginástica.

Figura 1: Evolução da Complexidade Computacional em Razão da Quantidade de Covariâncias e Ativos.



Fonte: Os Autores (2025).

Metodologia

Para a modelagem de Markowitz, o conjunto de opções era formado por 12 academias situadas em cidades ou bairros distintos na região sudeste do Brasil. As variáveis consideradas foram quantidade de Clientes externos (número); Demanda existente (número); Custo de aquisição (R\$); Espaço útil disponível à edificação (m²); Receita estimada para os próximos 12 meses (R\$); Satisfação dos clientes externos expressa no grau de fidelidade, *Net Promoter Score* - NPS (pontos); Benefício ou retorno financeiro, imagem ou posicionamento de marca (pontos); e Risco associado, como novos

entrantes, mudanças no comportamento do consumidor, mudanças regulatórias ou custos inesperados (pontos).

As restrições impostas foram, pelo menos, 6.000 Clientes externos, com Demanda de 7.000 pessoas, e Receita de R\$1.800.000,00 no ano subsequente, assim como Custo não superior a R\$4.500.000,00. Espaço, Satisfação, Benefício e Risco deveriam ser, em média, 1.000 m², 70,00 pontos, 80,00 pontos e 45,00 pontos. A implementação foi realizada em R 4.4.2, utilizando o ambiente de desenvolvimento integrado (*Integrated Development Environment* - IDE) RStudio 2022.07.1+554 "Spotted Wakerobin" for Windows e o pacote *quadprog* 1.5-8 (*Functions to Solve Quadratic Programming Problems*).

Possível seria utilizar a matriz identidade como covariância, todavia teria que assumir que as unidades fossem independentes, como não havia garantias de não ofensa, optou-se pela estimativa (III) ajustada pelos centroides dos *clusters* obtidos pelo método *k-médias* (Everton *et al.*, 2024; Pinheiro *et al.*, 2023; Souza, Oliveira e Januário, 2023; Silva *et al.*, 2023), considerando todos os ativos envolvidos. Contudo, a primeira providência foi desenvolver a análise descritiva pelas medias de localização (média e mediana) e dispersão (desvio padrão e coeficiente de variação) para obter a caracterização do conjunto de unidades (Costa Neto, 2002).

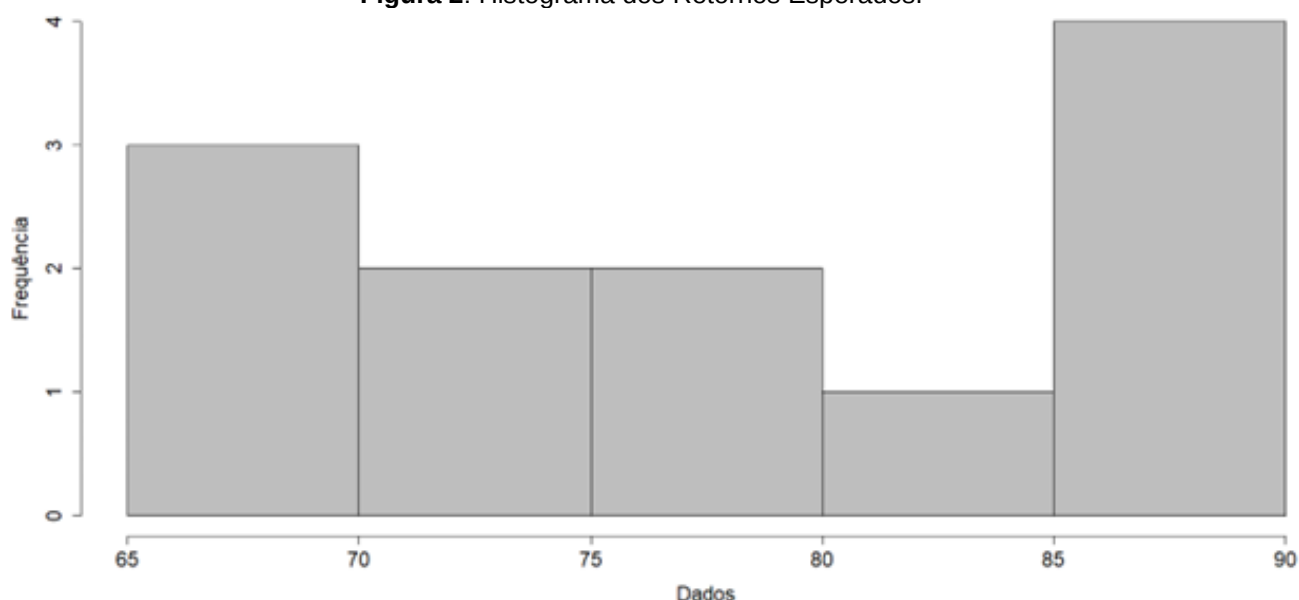
Resultados e Discussão

Primeiramente, investigou-se a não violação da suposição de normalidade sobre os retornos pela aplicação do teste de Shapiro-Wilk (TSW), tendo H0: os dados se aproximaram da Distribuição Normal, H1: os dados não se aproximaram da Distribuição Normal, e $\alpha = 0,05$. A estatística W seria a estimativa de correlação entre os dados do estudo e valores esperados da Distribuição Normal, portanto quando mais próximo de 1,00, maior a convergência à normalidade (Fávero e Belfiore, 2024; Miot, 2017).

No contexto da presente investigação, os retornos esperados conquistaram no TSW valor-p = 0,12 e W = 0,89. Então, não se rejeitou a hipótese nula, logo os dados convergiram à Normal. Imperativamente, fez-se necessário salientar que a análise do Histograma (Figura 2) poderia induzir ao afastamento da normalidade, especialmente pelas concentrações nas extremidades. O gráfico Quantile-Quantile (*QQ Plot*) verifica a proximidade à distribuição de probabilidade pela comparação entre quantis estimados e teóricos, então quanto mais próximos os pontos estiverem da linha de referência, maior será a proximidade à distribuição de interesse (Marden, 2004), no caso ora discutido a

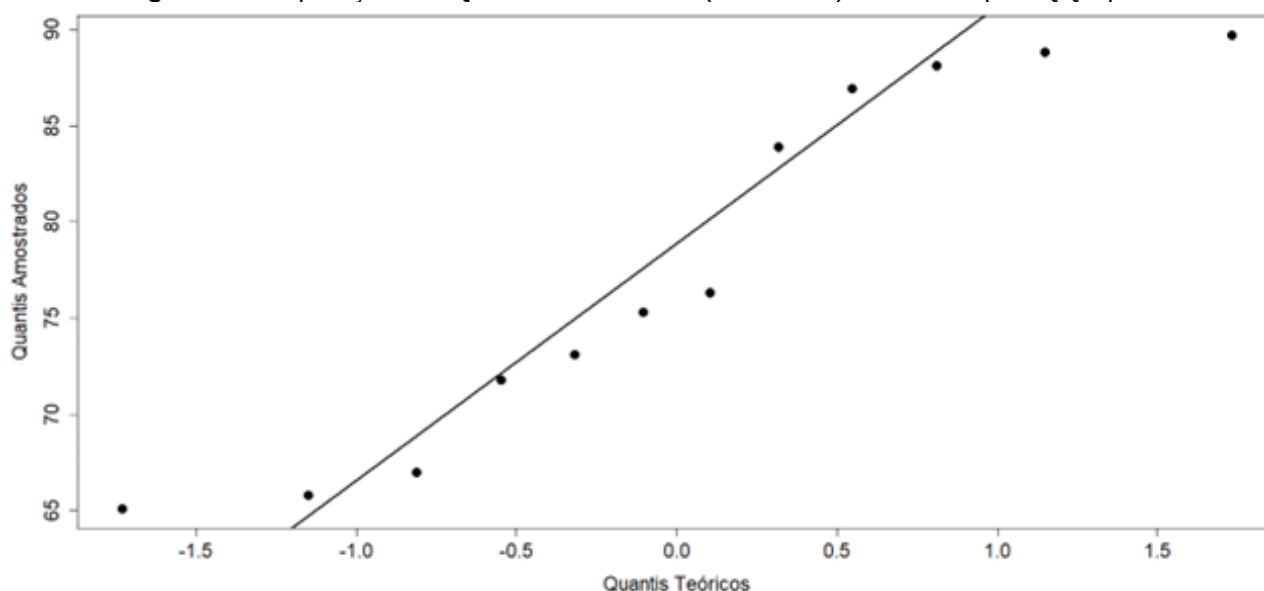
Normal. Possível foi perceber que os três pontos nos extremos tenderiam ao afastamento, comportamento não acompanhado pelos demais (Figura 3), portanto ilustrou-se os resultados do TSW.

Figura 2: Histograma dos Retornos Esperados.



Fonte: Os Autores (2025).

Figura 3: Comparação dos Quantis Observados (Estimados) e Teóricos pelo *QQ Pplot*.



Fonte: Os Autores (2025).

A caracterização das variáveis (Tabela 1) revelou que somente Satisfação, Benefício e Risco apresentavam baixa variabilidade, Coeficiente de Variação < 20,00%, portanto caracterizadas pelas respectivas estimativas de Média e Desvio padrão. Enquanto, as

demais, foram-na pela Medica e Coeficiente de Variação. Receita, Custo e Demanda detiveram as características mais discrepantes, o que era esperado, pois dependeriam de variáveis intervenientes. A Demanda estaria relacionada à distância a ser percorrida, às condições de acesso, às modalidades disponíveis, à capacidade de lotação e ao horário ofertado (Ackermann e Sellitto, 2022; Melo e Alcântara, 2011; Werner e Ribeiro, 2006; Lemos, 2006), além do planejamento de comunicação (Karhawi e Terra, 2021; Moresco, Marchiori e Gouvea, 2014) e vendas (Araújo, 2021; Castro Junior, 2011).

Tabela 1: Resultados Descritivos dos Ativos. Σ : Total; $\bar{x}$: Média; s: Desvio Padrão; md: Mediana; CV: Coeficiente de Variação.

Ativos	Σ	$\bar{x}$	s	md	CV
Clientes, nº	13.303,00	1.108,58	440,38	1.040,00	39,73
Custo, R\$	9.831.558,00	819.296,50	428.805,24	777.895,50	52,34
Espaço, m ²	34.666,00	2.888,83	868,81	3.032,00	30,07
Demanda, nº	15.331,00	1.277,58	531,36	1.194,50	41,59
Receita, R\$	5.000.508,00	416.709,04	350.617,03	342.465,37	84,14
Satisfação, pontos	909,00	75,75	11,58	72,00	15,29
Benefício, pontos	932,00	77,65	9,42	75,80	12,14
Risco, pontos	644,00	53,68	10,63	52,00	19,80

Fonte: Os Autores (2025).

Processos, operações e melhoramentos contínuos dependeriam do monitoramento, reconhecimento, verificação e aferição de custos desprendidos à manutenção do negócio e entrega do cliente externo, os quais não se limitariam, mas incluiriam aspectos listados anteriormente (Morgan e Rosa, 2006). Todavia, em serviços e servitização, não raramente, há disfuncionalidades organizacionais, as quais tenderiam a esconder custos em ocorrências como espera demasiada, movimentação inútil, retrabalho, acidente de trabalho, absenteísmo, ociosidade, litígios, sobreposição salarial e consumo excessivo de insumos, materiais, equipamentos ou instrumentos (Silva e Severiano Filho, 2011; Sakurada e Miyake, 2009).

Talvez, o ponto sensível na seleção de unidades residisse nas estimativas de receita para os próximos 12 meses, isso porque o valor de venda do serviço dependeria do sistema de precificação. Esse deveria considerar, dentre outras características, a margem de contribuição, ou seja, se o preço do serviço seria suficiente para cobrir custos e despesas fixas, portanto a unidade de margem seria a diferença entre a receita unitária e o custo variável da unidade (Pissinatti e Dias, 2022; Dias, 1992), mas poderia incluir o custo de oportunidade (Redivo, 2004). E o percentual sobre o custo do serviço para determinar o

preço de venda (*markup*). Tais aspectos dependeriam das respectivas personas desenhadas para cada unidade, o que, essencialmente, influenciado seria pela missão, visão e valores dos negócios, portanto demandariam alinhamento ao planejamento estratégico e careceriam de revisões no domínio do tempo (Gonçalves, Sugahara e Ferreira, 2020; Bentes, 2019; Cruz, 2018; Sousa, Batista e Mota, 2014; Miranda, 2007; Inglis, 2002).

O desenvolvimento do modelo de Markowitz requisitaria que duas variáveis quaisquer das unidades, x_i e x_j , $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 7, 8\}$ ($i \neq j$), apresentassem $\text{corr}(x_i, x_j) \neq 1,00$, o que foi respeitado (Tabela 2), pois $\text{corr}(\text{Clientes}, \text{Demanda}) \cong 0,987$ se estabeleceu por aproximação, e o intervalo de confiança (95,00%) não inclui a unidade, portanto a probabilidade seria nula dessa hipótese acontecer, que pese a significância estatística, valor- $p = 0,003$ (Tabela 3). O emprego de casas decimais se fez necessário somente para demonstrar a não violação do requisito.

A variável Espaço apresentou correlação negativa com todas as demais, portanto a elevação a área tenderia a ser acompanhada pela redução das outras características (Tabela 2), mesmo não havendo causalidade. Relevante seria observar que a significância se estabeleceu com Satisfação (valor- $p = 0,001$) e Risco (valor- $p = 0,039$), poderia ser indício de que havendo menor Espaço, os clientes internos teriam potencializada a atenção aos externos, porém o Risco tenderia a se elevar pela maior rigidez da organização da área em razão da planta da edificação (Tabela 3).

O comportamento de Benefício teve sentido contrário ao das outras variáveis (Tabela 2), rompendo a percepção senso comum de que o retorno do negócio estaria diretamente associado à Demanda, Receita, ao número de Clientes externos, Espaço disponível ou Custo de aquisição. Mas, ratificou acompanhar, mesmo carecendo de significância, a Satisfação do consumidor e o Risco do negócio (Tabela 3).

A Satisfação estaria relacionada à lucratividade, particularmente no mercado de academias de ginástica caracterizado por elevada concorrência, então aquela poderia ser favorecida, por exemplo, pelas dimensões empatia e responsividade do atendimento pessoal (Fiebig e Freitas, 2011). Talvez, necessário fosse modelar os aspectos determinantes da Satisfação, o que poderia ser implementado por equações estruturais (Franco *et al.*, 2024; Tinoco e Ribeiro, 2007), dado que o Cliente participaria da criação de valor, consequentemente um recurso de negócio seria (Mangini, 2019), favorecendo a percepção de valor agregado e o posicionamento de mercado.

Tabela 2: Estimativas de Correlação com Intervalo de Confiança (95,00%) das Características das Unidades.

	Custo	Espaço	Demanda	Receita	Satisfação	Benefício	Risco
Clientes	0,316 [-0,317; 0,753]	-0,045 [-0,603; 0,543]	0,987 [0,952; 0,996]	0,348 [-0,282; 0,769]	0,182 [-0,437; 0,685]	-0,498 [-0,834; 0,106]	0,376 [-0,253; 0,781]
Custo		-0,215 [-0,702; 0,409]	0,382 [-0,246; 0,784]	0,597 [0,035; 0,872]	0,208 [-0,415; 0,699]	-0,221 [-0,706; 0,404]	0,402 [-0,223; 0,793]
Espaço			-0,024 [-0,589; 0,558]	-0,378 [-0,782; 0,250]	-0,813 [-0,946; -0,448]	-0,522 [-0,843; 0,074]	-0,601 [-0,874; -0,042]
Demanda				0,376 [-0,252; 0,781]	0,133 [-0,478; 0,657]	-0,510 [-0,838; 0,090]	0,362 [-0,268; 0,775]
Receita					0,480 [-0,130; 0,826]	-0,179 [-0,683; 0,440]	0,575 [0,002; 0,864]
Satisfação						0,237 [-0,390; 0,714]	0,686 [0,185; 0,904]
Benefício							0,205 [-0,418; 0,697]

Fonte: Os Autores (2022).

Tabela 3: Estimativas de Significância (valor-p) e Estatística Teste (t(GL = n-2;95,00%)) das Correlações das Características das Unidades, $\alpha = 0,05$.

	Custo	Espaço	Demanda	Receita	Satisfação	Benefício	Risco
Clientes	0,317; 1,053	0,890; -0,142	0,003; 19,173	0,267; 1,176	0,570; 0,587	0,010; -1,185	0,229; 1,282
Custo		0,502; -0,696	0,221; 1,306	0,040; 2,352	0,516; 0,674	0,489; -0,718	0,195; 1,389
Espaço			0,942; -0,074	0,226; -1,290	0,001; -4,412	0,082; -1,934	0,039; -2,379
Demanda				0,228; 1,282	0,681; 0,424	0,090; -1,874	0,248; 1,226
Receita					0,114; 1,729	0,578; -0,575	0,050; 2,224
Satisfação						0,459; 0,770	0,014; 2,983
Benefício							0,524; 0,661

Fonte: Os Autores (2025).

A correlação entre Benefício (retorno) e Risco foi baixa, $r = 0,205$ (Tabela 2), e não significativa, valor- $p = 0,524$ (Tabela 3). Então, somente 4,19% da variância poderia ser explicada, o que convergiu à expectativa, pois a linearidade não descreveria adequadamente, salvo fenômenos particulares, a relação entre Risco e retorno dos negócios. O modelo de Markowitz utilizaria a matriz de covariâncias para otimizar a solução, entretanto, a covariância não refletiria a intensidade de dependência entre as variáveis organizadas aos pares (Oliveira, Morais e Cirillo, 2011; Fonseca, 2009; Storck *et al.*, 2000), exemplificando $cov(\text{Benefício}, \text{Risco}) \cong 20,49$ e $cov(\text{Satisfação}, \text{Risco}) \cong 77$, não seria possível estimar que a segunda fosse 3,78 vezes mais intensa que a primeira.

A razão disso, as oito variáveis descritivas foram normalizadas e ponderadas em razão da respectiva importância relativa (Güdemann e Münnich, 2023; Böhringer e Jochem, 2007), subsequentemente submetidas à análise de agrupamento para estimar os centroides, então esses foram aplicados sobre a matriz de covariância para ajustá-la. Como consequência, o modelo indicou as unidades 1, 3, 4, 6, 7, 10 e 12 para comporem o portfólio de investimento, com a distribuição de recursos realizada segundo os percentuais da Alocação Normalizada (Tabela 4). O produto desses pelos valores iniciais das características proporcionaria as seguintes métricas como resultados do negócio, 7.666 pessoas atendidas (Mínimo = 7.000), gerando como Receita Total = R\$5.286.677,00, o que representaria 2,93 vezes o Mínimo = R\$1.800.000,00, sob o Risco médio = 31,31%.

Tabela 4: Unidades Selecionadas e Alocação de Recursos – Pesos (%).

Unidades	Seleção	Alocação de Recursos	Alocação Normalizada de Recursos
1	1	13,79	14,87
2	0	-9,61	-10,36
3	1	2,56	2,76
4	1	0,06	0,06
5	0	-11,7	-12,61
6	1	10,17	10,96
7	1	9,18	9,90
8	0	-9,02	-9,72
9	0	-14,64	-15,78
10	1	3,52	3,79
11	0	-0,92	-0,99
12	1	7,59	8,18

Fonte: Os Autores (2025).

Considerações Finais

O objetivo do estudo foi desenvolver um modelo de Markowitz para formar o portfólio para investimento em unidades de academia de ginástica, o que foi alcançado sem violação de qualquer restrição ou requisito do método. Então, a conclusão foi pela adequada conquista do objetivo.

Aos estudos futuros recomenda-se replicar o estudo, porém utilizado a análise de componentes principais para ajustar a matriz de covariância, o que pode fornecer resultados diferentes. A exclusão da variável Clientes tenderia a impactar nos resultados, dado a correlação significativa com Demanda. A pormenorização dos resultados seria alcançada pela avaliação de cada unidade por similar conjunto de variáveis, porém discriminadas por modalidades; tipos de clientes, considerando faixa etária, dicotomia sexual, plano contratado e escolaridade, por exemplo; serviços acessórios existentes, como lanchonete, consultoria nutricional, massoterapia, estética e fisioterapia; e determinantes de satisfação.

Referências

- ACKERMANN, AEF; SELLITTO, MA. Métodos de previsão de demanda: uma revisão da literatura. **Innovar**, v. 32, n. 85, p. 83-99, 2022.
- AKKARI, ACS. **Processos estocásticos**. Londrina (PR): Editora e Distribuidora Educacional, 2018.
- ARAÚJO, JB. **Planejamento de vendas e operações (S&OP) e planejamento integrado de negócios (IBP) em uma empresa de serviços financeiros**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Faculdade de Engenharia. Universidade Estadual Paulista “Júlio Mesquita Filho”. Guaratinguetá (SP), 2021.
- BENTES, A. A gestão algorítmica da atenção: enganchar, conhecer e persuadir. In POLIDO, FBP; ANJOS, LC; BRANDÃO, LSC. (Org.). **Políticas, internet e sociedade**. Belo Horizonte (MG): Iris, 2019, p. 222-234.
- BODIE, Z; KANE, A; MARCUS, AJ. **Investments**. New York (USA): McGraw-Hill, 2014.
- BÖHRINGER, C; JOCHEM, PEP. Measuring the immeasurable – a survey of sustainability indices. **Ecological Economics**, v. 63, p. 1-8, 2007.
- CAMARGO, GCG; ARTEAGA, VAA. El modelo de Markowitz para la selección de portafolios de inversión. **Perspectivas de la Ciencia y la Tecnología**, v. 5, n. 9, 2022. Doi: 10.61820/pct.v5i9.925.
- CASTRO JUNIOR, PR. **Planejamento de vendas**. Monografia (Bacharelado em Administração de Empresas) – Faculdade de Administração e Ciências Contábeis. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2011.
- CLIMENT-SERRANO, S; PERELLÓ-FONS, P. Gestión eficiente de carteras: Modelo de Markowitz y el Ibex-35. **Revista de Economía y Finanzas**, v. 43, n. 121, p. 91-103, 2020.
- COSTA NETO, PLO. **Estatística**. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

COSTA, AM. Análise de investimento pelo modelo de Markowitz: uma breve revisão da literatura e sua aplicação didática no Excel. **RIE – Revista Iniciativa Econômica**, v.9, n. 1/2, 2023.

CRUZ, PBK. **Comparação de método de precificação e seu impacto na receita de pequenos negócios**. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Gestão Financeira) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba (PR), 2018.

DIAS, IP. Algumas observações sobre a margem de contribuição. **Revista de Administração de Empresas**, v. 32, n. 3, p. 36-45, 1992.

ELTON, EJ; GRUBER, MJ. **Modern portfolio theory and investment analysis**. New Jersey (USA): Wiley, 1995.

EVERTON, ANF *et al.* Agrupamento de variáveis de treinamento de ultramaratonistas. **Revista Presença**, v. 10, n. 22, p. 4-20, 2024.

FÁVERO, LP; BELFIORE, P. **Manual de análise de dados: estatística e machine learning com Excel®, SPSS®, Stata®, R® e Python®**. Rio de Janeiro: Gen LTC, 2024.

FIEBIG, ÉA; FREITAS, EC. Canais de atendimento, satisfação e lucratividade de clientes em serviços: um caso bancário. **REAd. Revista Eletrônica de Administração (Porto Alegre)**, v. 17, n. 3, p. 742-775, 2011.

FONSECA, GVA. **Análise de covariância não-paramétrica**. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Departamento de Estatística. Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte (MG), 2009.

FRANCO, APSF *et al.* Relações de variáveis em indivíduos depressivos pela modelagem por equações estruturais. **Revista Presença**, v. 10, n. 22, p. 371-388, 2024.

FUENTES, JRC. El modelo de Black-Scholes. **Pro Mathematica**, v. 18, n. 35-36, p. 109-126, 2004.

GONÇALVES, FLP; SUGAHARA, CR; FERREIRA, DHL. Sustentabilidade financeira em negócios sociais. **Revista Grifos**, v. 29, n. 49, p. 109-125, 2020.

GONZALEZ, AP; VAZQUEZ, OHZ. Diseño de un portafolio óptimo de suministro eléctrico a partir del modelo de Markowitz: el caso de un usuario en México. **Contaduría y Administración**, v. 65, n. 1, e154, 2020.

GÜDEMANN, L; MÜNNICH, R. Quality and sensitivity of composite indicators for sustainable development. **Austrian Journal of Statistics**, v. 52, p. 82-100, 2023.

HILLIER, FS; LIEBERMAN, GJ. **Introdução à pesquisa operacional**. Porto Alegre (RS): Amgh, 2013.

HULL, JC. **Options, futures, and other derivatives**. London (UK): Pearson, 2021.

INGLIS, Paul F. O lucro está no pós-venda. **HSM Management**, v. 32, n. 6, p. 1-6, 2002.

JANDRE, GRS *et al.* Modelagem estocástica da variabilidade da frequência cardíaca. **Revista Presença**, v. 10, n. 22, p. 237-252, 2024.

KARHAWI, I; TERRA, CF. Planejamento estratégico em comunicação digital: apontamentos e possibilidades entre a teoria e a prática. **Comunicação & Inovação**, v. 22, n. 49, p. 3-17, 2021.

KEELING, MJ; ROHANI, P. **Modeling infectious diseases in humans and animals**. New Jersey (USA): Princeton University Press, 2008.

LEMONS, FO. **Metodologia para seleção de métodos de previsão de demanda**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de

Produção. Escola de Engenharia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre (RS), 2006.

LIMA, AM. **Análise dos indicadores fundamentalistas na minimização do risco em carteira de investimento aplicando o modelo de Markowitz**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) – Escola de Engenharia. Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Goiânia (GO), 2021.

MANGINI, ER. **A cadeia de lucro em serviços e o uso do modelo DART**: as influências da cocriação de valor no comportamento dos clientes de serviços. Tese (Doutorado em Administração) - Programa de Pós-Graduação em Administração. Universidade Nove de Julho, São Paulo. São Paulo, 2019.

MARDEN, JI. Positions and QQ Plots. **Statistical Science**, v. 19, n. 4, p. 606-614, 2004.

MARKOWITZ, HM. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MARKOWITZ, HM. **Portfolio selection**: efficient diversification of investments. New Jersey (USA): Wiley, 1959.

MELO, DC; ALCÂNTARA, RLC. A gestão da demanda em cadeias de suprimentos: uma abordagem além da previsão de vendas. **Gestão & Produção**, v. 18, n. 4, p. 809-824, 2011.

MERTON, RC. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, v. 7, n. 4, p. 1851-1872, 1972.

MIOT, HÁ. Avaliação da normalidade dos dados em estudos clínicos e experimentais. **Jornal Vascular Brasileiro**, v. 16, n. 2, p. 88-91, 2017.

MIRANDA, CMCS. **Qualidade do serviço e satisfação do cliente**: o caso Vodafone. Dissertação (Mestrado em Marketing) – Faculdade de Economia e Gestão. Universidade Católica Portuguesa. Porto (Portugal), 2007.

MORESCO, MC; MARCHIORI, M; GOUVEA, DMR. Pensamento estratégico e planejamento estratégico: possíveis inter-relações. **Gestão & Planejamento-G&P**, v. 15, n. 1, p. 63-79, 2014.

MORGAN, BF; ROSA, MS. Custos em Empresas Prestadoras de Serviços: o conceito de objeto de custo e a realidade das empresas. **Contabilidade Vista & Revista**, v. 17, n. 4, p. 97-111, 2006.

ØKSENDAL, B. **Stochastic differential equations**: an introduction with applications. Berlin (Germany): Springer, 2003.

OLIVEIRA, TA; MORAIS, AR; CIRILLO, MA. Métodos de estimação de parâmetros em modelo de covariância com erro na covariável. **Ciência Rural**, v. 41, n. 10, p. 1851-1857, 2011.

PINHEIRO, RM *et al.* Computer vision by unsupervised machine learning in seed drying process. **Ciência e Agrotecnologia**, v. 47, e018922, 2023.

PISSINATI, LG; DIAS, E. A margem de contribuição como métrica de precificação visando lucro para a empresa. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 8, n. 10, p. 4334-4347, 2022.

REDIVO, RB. Considerações sobre o cálculo da margem de contribuição: uma proposta para inclusão do custo de reposição e do custo de oportunidade. **Revista de Ciências da Administração**, v. 6, n. 11, p. 1-19, 2004.

ROMA, CMS; IQUIAPAZA, RA; FERREIRA, BP. Aplicação da fronteira eficiente por meio das técnicas de bootstrapping e Monte Carlo: uma paralelização entre bm&fbovespa e nyse a partir das principais adrs brasileiras. **RACE-Revista de Administração, Contabilidade e Economia**, v. 14, n. 1, p. 121-142, 2015.

ROSS, SM. **Stochastic processes**. New Jersey (USA): Wiley, 1996.

SAKURADA, N; MIYAKE, DI. Aplicação de simuladores de eventos discretos no processo de modelagem de sistemas de operações de serviços. **Gestão & Produção**, v. 16, n. 1, p. 25-43, 2009.

SILVA, LL *et al.* Análise das atividades interativas de um jogo sério usando aprendizagem de máquina: um estudo para pessoas com deficiência intelectual. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 21, n. 1, p. 160-169, 2023.

SILVA, MC *et al.* Diversificação do risco de um portfólio de ativos modelo de Markowitz. **Redeca, Revista Eletrônica do Departamento de Ciências Contábeis & Departamento de Atuária e Métodos Quantitativos**, 7(2), 19–34, 2021.

SILVA, PCP; SEVERIANO FILHO, C. Ocorrência de custos ocultos em operações de serviços: insights sobre observação em uma sociedade de economia mista no Brasil. **Gestão & Produção**, v. 18, n. 3, p. 499-508, 2011.

SOUSA, EM; BATISTA, PCS; MOTA, MO. Escala para mensuração de modelo de negócios. **Revista Ciências Administrativas**, v. 20, n. 2, p. 480-504, 2014.

SOUZA, PO; OLIVEIRA, JMP; JANUÁRIO, LH. Influência da gordura do braço sobre medida indireta da pressão sanguínea: uma abordagem estatística e de machine learning. **Arquivos Brasileiros de Cardiologia**, v. 120, n. 5, e20220484, 2023.

STORCK, L *et al.* Análise de covariância para melhoria da capacidade de discriminação em ensaios de cultivares de milho. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, v. 35, n. 7, p. 1311-1316, 2000.

SUKHOMLIN, N. Ley de conservacion del precio final en el modelo de Black Scholes. **Economía**, n. 17-18, p. 147-162, 2001.

TINOCO, MAC; RIBEIRO, JLD. Uma nova abordagem para a modelagem das relações entre os determinantes da satisfação dos clientes de serviços. **Production**, v. 17, n. 3, p. 454-470, 2007.

VIEIRA, AS; MENDES, DAA. Análise ótima para portfólio de investimentos aplicando o modelo de Markowitz. **Revista Interface Tecnológica**, v. 19, n. 1, p. 91–111, 2022.

VILLCA, DC. Modelo de Markowitz aplicado a fondos de inversión en Bolivia. **Revista Ñeque**, v. 3, n. 7, p. 176–189, 2020.

WERNER, L; RIBEIRO, JLD. Modelo composto para prever demanda através da integração de previsões. **Production**, v. 16, n. 3, p. 493-509, 2006.