REVISTA PRESENÇA

ISSN: 2447-1534

MAXIMIZAÇÃO ADMINISTRATIVA E ESPORTIVA DE CENTRO DE TREINAMENTO DE FUTEVÔLEI PELA PROGRAMAÇÃO FRACIONÁRIA

EVERTON, Adriana Nunes da Fonseca[1]; BRASIL, Roxana Macedo[2]; CARVALHO JUNIOR, Sergio[3]; BARRETO, Ana Cristina Lopes y Glória[4]; BRITO, Diogo de Freitas[4;5;6;]; JUNIOR, Homero da Silva Nahum[4;7]

Resumo

Objetivou-se desenvolver modelos para maximizar as taxas de retorno, produtividade e do desempenho de um Centro de Treinamento de Futevôlei de Vitória (ES). Utilizou-se a programação fracionária codificada em linguagem R 4.3.3 com os pacotes lpSolve 5.6.23 e CVXR 1.0-15. Os resultados conquistaram a solução ótima em todos os casos, destacando a influência do método empregado na resolução sobre a precisão dos pontos de máximo. Logo, concluiu-se que o objetivo foi atingido a contento, lançando luz sob a interpretação dos resultados conquistados.

Palavras-chave: Planejamento. Modelagem. Administração. Economia. Estatística.

Abstract

The objective was to develop models to maximize the rates of return, productivity, and performance of a Footvolley Training Centre in Vitória (ES). Fractional programming coded in R 4.3.3 language with the lpSolve 5.6.23 and CVXR 1.0-15 packages was used. The results achieved the optimal solution in all cases, highlighting the influence of the method employed in the resolution on the accuracy of the maximum points. Therefore, it was concluded that the objective was satisfactorily achieved, shedding light on the interpretation of the results obtained.

Keywords: Planning. Modeling. Administration. Economics. Statistics.

Introdução

A modelagem matemática utilizaria a programação linear ao lidar com problemas de alocação de recursos limitados com todas as variáveis descritas por funções lineares, todavia, esses requisitos se manifestariam como exceções no mundo real, no qual a função-objetivo ou, pelo menos, uma restrição violaria a linearidade (Abensur, 2018). Tal

[1] Profissional de Educação Física da Adriana Nunes Consultoria de Corrida;
[2] Docente Ph.D. em Educação Física;
[3] Pesquisador convidado Biodesa;
[4] Docentes do Curso de Educação Física do Centro Universitário Celso Lisboa;
[5] Docente do Curso de Gestão Desportiva e do Lazer do Centro Universitário Celso Lisboa;
[6] Consultor Iceberg Business Academy;
[7] Docente da Escola de Saúde da Universidade Cândido Mendes.

REVISTA PRESENÇA

ISSN: 2447-1534

característica, não raramente, impediria a obtenção da solução ótima, entretanto, essa poderia ser favorecida pela formalização das restrições (Hillier e Leiberman, 2006), o que, em alguns casos, poderia ser confirmado na inspeção visual ou pela mudança na interpretação do problema, como ocorreria na programação fracionária (Stancu-Minasian, 1999).

Nesse processo de modelagem matemática, a função objetivo seria expressa por razão ou fração entre funções ($\text{máx ou mín } Z = \frac{f(x)}{g(x)}$), conforme, comumente, demandaria a obtenção de índice de desempenho. Dessa forma, a solução ótima seria, essencialmente, a taxa de eficiência, o que envolveria, por exemplo, equipamentos-produção, entrada-saída, retorno-risco ou lucro-custo. Matematicamente (Charnes e Cooper, 1962), no modelo de programação fracionária (I), consequentemente, na solução ótima haveria o limite máximo de 100,00% em razão da consequência de referência ou zero (como produção, saída, risco ou risco), o que permitiria a formulação linear (II), por conseguinte, a denominação de programação fracionária linear.

$$máx\ Z = \frac{\sum_{i=1}^{s} a_i y_{i0}}{\sum_{i=1}^{s} b_i\, x_{i0}}$$

Sujeito a:

$$\frac{\sum_{i=1}^{s} a_i y_{ij}}{\sum_{i=1}^{s} b_i\, x_{ij}} \leq 1; \mathrm{j} = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \text{(I)}$$

$a_i, \ldots, a_s \geq 0; b_i, \ldots, b_s \geq 0$

onde: a_i: peso para a consequência *i*; y_{ij}: quantidade de consequências *i* da unidade *j*; b_i: peso para a causa *i*; x_{ij}: quantidade de causas *i* da unidade *j*.

$$máx\ Z = \sum_{i=1}^{s} a_i y_{i0}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i x_{i0} \qquad \text{(II)}$$

$$\sum_{i=1}^{s} a_i y_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} b_i x_{ij}$$

$a_i, \ldots, a_s \geq 0; b_i, \ldots, b_s \geq 0$

ISSN: 2447-1534

Explicitamente, na Programação Fracionária Linear - PFL, a função-objetivo seria formada por funções lineares. Porém, caso o numerador ou denominador seja representado por função quadrática, então, o modelo seria de Programação Fracionária Quadrática – PFQ (Cambini, Crouzeix e Martein, 2002; Patel, Behera e Kumar, 2025), como na eficiência de investimento tomada pelo retorno excedente em relação à volatilidade (desvio padrão) do risco assumido, conhecido como Índice de Sharpe (Araújo Júnior e Tavares, 2025; Meneses, 2025). Talvez, o caso especial residisse na necessidade de maximizar a função do numerador (côncava) e minimizar aquela do denominador (convexa), modelo fracionário côncavo-convexo - PFC (Dey e Mehrotra, 2024), quando a solução ótima exigiria a aplicação do método de Dinkelbach (Dinkelbach, 1967). Esse algoritmo teve por base o teorema de Jagannathan, o qual relacionou as programações fracionária e paramétrica (Jagannathan, 1966), demonstrando a associação entre os métodos de Isbell e Marlow para a programação fracionária linear (Isbell e Marlow, 1956) e Ritter para o modelo paramétrico quadrático (Ritter, 1962).

O método de Dinkelbach, conhecido como transformada paramétrica, encontraria a solução ótima do problema de PFC, transformando-o em sequência de problemas paramétricos, por essência, mais simples. Pragmaticamente, a função-objetivo seria percebida como máx Z = $\{f(x) - \lambda \, . \, g(x)\}$, a resolução atualizaria o parâmetro λ a cada iteração com o valor corrente daquela função ($\lambda_{k+1} = \frac{f(x_k)}{g(x_k)}$), então, a solução ótima seria conquistada quando $f(x_k) - \lambda_k \, . \, g(x_k) \to 0$, de outra forma, $\lambda_k = \frac{f(x_k)}{g(x_k)}$ (Dinkelbach, 1967). Alternativamente, possível seria aplicar o método da bissecção, no qual realizar-se-ia busca binária sobre o espaço de valores da função-objetivo, em cada iteração, resolvido seria um problema de viabilidade convexa para satisfazer $\{\exists x \in \mathbb{R} | f(x) - \lambda . \, g(x) \geq 0\}$, ou expresso de outra maneira, procurar-se-ia um valor de *x* que torne verdadeira a condição $f(x) - \lambda . \, g(x) \geq 0$ (Kara, Kocken e Akdemir, 2025). A transformada de Schaible poderia ser empregada para transformar a função-objetivo original de racional em composta, tornando o problema adequado à PFQ ou Programação de Cone de Segunda Ordem (*Second-Order Cone Programming* - SOCP), essa quando as restrições definiriam região de solução cônica e a função-objetiva fosse linear (Saraiva, 2024; Meneses, 2025).

Talvez, as aplicações detentoras de elevado nível de popularidade utilizariam a análise envoltória de dados (*Data Envelopment Analysis* – DEA), modelagem não paramétrica para avaliar a eficiência de unidade de decisão (por exemplo, departamento comercial, unidade acadêmica ou profissional liberal) que utilizaria entradas ou insumos para gerar saídas, respostas, produtos ou serviços (Charnes, Cooper e Rhodes, 1962). Essa modelagem específica da programação fracionária (I) apresentaria robustez para problemas em Administração, Contabilidade, Economia, Engenharia de Produção, finanças, marketing e logística, por exemplo (Colin, 2007). Porém, permitindo investigar a eficiência dos treinos disponibilizados por *personal trainer* (Brito *et al.*, 2025), de aterros sanitários (Ferreira, Penereiro e Fujita, 2017), negócios de varejo (Miranda, 2015) e usinas de açúcar e álcool (Junior, Bonacim e Junior, 2009). Assim como na avaliação de tornos mecânicos (Leta *et al.*, 2005) e comparação de custos operacionais nos serviços públicos de água e esgoto (Pompermayer, Serrano e Saiki, 2025).

A programação fracionária em geral foi aplicada na modelagem da eficiência energética de redes sem fio (Zappone e Jorswieck, 2015) e para otimizar portfólio de investimento com base no risco (Hu, Gao e Guo, 2025), produção e alocação de recursos (Dey, Kim e Mehrotra, 2024) e o Índice Sharpe (Patel, Behera e Kumar, 2025). Então, objetivou-se desenvolver modelos para maximização da taxa de retorno, produtividade e do desempenho.

Metodologia

A pesquisa caracterizou-se como estudo de caso, pois empregou-se um Centro de Treinamento de Futevôlei (CTF) localizado em Vitória (ES), cuja necessidade seria a otimização da eficiência, utilizando o contexto de operação em uma única situação para cada nível dentre: 1) Administrativo, maximizar a taxa de retorno, considerando a relação Lucro/Investimento; 2) Técnico, maximização da produtividade, essa entendida como Intervenções/Número de Técnicos; e 3) Praticante, considerando o principal competidor, maximizar o desempenho, compreendendo-o como Valor/Risco. A modelagem foi realizada em linguagem R 4.3.3. com o emprego dos pacotes lpSolve 5.6.23 e CVXR 1.0-15.

Resultados e Discussão

O problema da maximização da Taxa de Retorno (lucro/investimento), considerou que o departamento de marketing teria R$ 100.000,00 para todas as campanhas de 2025, tendo por objetivo maximizar o Retorno sobre o Investimento (ROI), dado pela razão entre o lucro operacional e total investido (Cardoso e Oliveira, 2023). A expectativa de retorno foi obtida pelo estudo do mercado, dado que a Organização carecia de dados sobre o assunto, então, estabelecido foi que o marketing digital (x_1) originaria o quíntuplo do investimento (Fator 5), enquanto o tradicional (x_2), o triplo (Fator 3). Isso tornou o lucro uma função linear do investimento, $L(x) = 5x_1 + 3x_2$, essa família de curvas recepcionou a função investimento, $I(x) = x_1 + x_2$, e estabeleceu-se, arbitraria e compulsoriamente, que o digital deveria receber, pelo menos, o dobro de recursos em comparação ao tradicional. O modelo gerado observando as condições postas (III) poderia ser resolvido com a transformada de Charnes-Cooper (Charnes e Cooper, 1962; You *et al.*, 2023; Zhou *et al.*, 2025) ou, dada a simplicidade matemática, intuitivamente, assumindo que a totalidade do capital seria utilizada e aplicando a Restrição (2), o que significaria assumir que $x_2 > 0$, em que pese, não ter ocorrido impedimento em comprometer, integralmente, o valor em x_1.

$$\text{máx } Z(x) = \frac{L(x)}{I(x)} = \frac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$$

Sujeito a:

$$\begin{gathered} (1)\ x_1 + x_2 \leq 100 \\ (2)\ x_1 \geq 2x_2 \\ (3)\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered} \qquad \text{(III)}$$

Então, sob a orientação intuitiva, assumiu-se $x_1 + x_2 = 100$ e $x_1 = 2x_2$, assim, $2x_2 + x_2 = 100 \therefore x_2 \approx 33{,}33$ e $x_1 \approx 66{,}67$. Consequentemente, os investimentos seriam tradicional = 33.330,00 e digital = R$ 66.670,00, tendo ROI = 4,33 ($\approx \frac{5 \cdot 66{,}67 + 3 \cdot 33{,}33}{100} = Z(x)$), portanto cada R$ 1,00 investido retornaria R$ 4,33 de lucro. A utilização da transformada de Charnes-Cooper requisitou a definição da variável de transformação, dada pelo inverso de $I(x)$, $t = \frac{1}{x_1 + x_2}$, como $x_1 + x_2 > 0$, então a existência de *t* estaria garantida. Porém, o método exigiria a criação de $y_1 = t \cdot x_1$ e $y_2 = t \cdot x_2$, reescrevendo $I(x) = x_1 + x_2 = \frac{1}{t}$ e $L(x) = 5x_1 + 3x_2 = \frac{5y_1 + 3y_2}{t}$, o que resultou na transformação da função-objetivo, $Z(x) = \frac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{\frac{5y_1 + 3y_2}{t}}{\frac{1}{t}} \therefore$ $Z(x) = 5y_1 + 3y_2$, em linear. Aplicando, as necessárias transformações nas restrições, o modelo (IV) representaria o problema em programação linear equivalente, com o acréscimo da Restrição (0) que estabeleceu a relação entre *y* e *t*.

ISSN: 2447-1534

$$\text{máx } Z(x) = 5y_1 + 3y_2$$

Sujeito a:

$$(0)\ y_1 + y_2 = t(x_1 + x_2) = t.\frac{1}{t} = 1\ \therefore y_1 + y_2 = 1$$

$$(1)\ x_1 + x_2 \leq 100\ \ \div (x_1 + x_2) \therefore \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \leq 100.\frac{1}{x_1 + x_2} \therefore 1 \leq 100t \qquad \text{(IV)}$$

$$(2)\ x_1 \geq 2x_2\ \ \div (x_1 + x_2) \therefore \frac{x_1}{x_1 + x_2} \geq 2\frac{x_2}{x_1 + x_2} \therefore y_1 \geq 2y_2$$

$$(3)\ y_1, y_2, t \geq 0$$

A resolução permitiria de (0) obter $y_1 = 1 – y_2$ e substituir em (2), resultando $1 – y_2 \geq 2y_2 \therefore y_2 \leq \frac{1}{3}$, e na função-objetivo, obtendo $Z = 5(1 – y_2) + 3y_2 \therefore Z = 5 – 2y_2$. Então, maximizar Z exigiria minimizar y_2, tornando nulo por (3) o tornaria nulo e aplicando (0), $y_1 + y_2 = 1 \therefore y_1 + 0 = 1 \therefore y_1 = 1$. Todavia, necessário foi verificar se houve violação de (2), $y_1 \geq 2y_2 \therefore 1 \geq 2.0 \therefore 1\geq 0$, o que não ocorreu, logo, a solução ótima seria $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ e $Z = 5 . 1 + 3 . 0 = 5$. A determinação de *t* recairia sobre (1), mas, exigindo a recuperação de $x_1 = \frac{y_1}{t} = \frac{1}{t}$ e $x_2 = \frac{y_2}{t} = \frac{0}{t} = 0$, substituindo-os em $x_1 + x_2 \leq 100$, obtido foi $\frac{1}{t} + 0 \leq 100 \therefore 1 \leq 100t$. Essa seria, exatamente, a Restrição (1), assim, a maximização de L(x), somente para obter a solução, dado que não seria o objetivo, associada estaria ao maior valor de x_1, o qual corresponderia ao menor valor de t, esse identificado em (1), $1 \leq 100t \therefore 0{,}01 \leq t$, logo, $t = 0{,}01$. Dessarte, $x_1 = \frac{1}{t} = \frac{1}{0{,}01} = 100$, $x_2 = 0$ e $Z(x) = \frac{5\,.100+3\,.\,0}{100} = 5$.

Comparando as soluções, a transformada de Charnes-Cooper encontrou o máximo global, enquanto o método intuitivo obteve o local, em suma, ambos resultados seriam viáveis, porque, Z(x) seria a média ponderada entre lucro e investimento, em outras palavras, qualquer solução com Z(z) entre três e cinco seria aceitável. A diferença ocorreu, porque, na primeira solução, à $x_1 \geq 2x_2$ imposto foi $x_2 > 0$, todavia, essa seria somente possível, não exigência. Em última análise, a solução ótima seria alcançada com o investimento somente em marketing digital, culminando em $ROI_{Charnes\text{-}Cooper} = 5{,}00 > ROI_{Intuitivo} = 4{,}33$.

Valeria considerar que, além da ausência de série histórica, a fragilidade da decisão administrativa quanto à Taxa de Retorno estaria na ausência de análise de sensibilidade do ROI (Xavier e Bonizio, 2019), ou seja, assumiu-se que todas as variáveis que o compuseram se comportariam de maneiras similares e constantes, e ter aquela estimativa como único indicador de retorno, o que no longo prazo poderia comprometer a avaliação do negócio, talvez, interessante fosse, também, empregar a Taxa Interna de Retorno (TIR), particularmente de forma incremental no domínio do tempo (Silva *et al.*, 2024).

No domínio da equipe técnica, a maximização da produtividade (Intervenções/Número de Técnicos), considerou a disponibilidade de cinco profissionais, os quais deveriam ser divididos entre as possibilidades de intervenção: Individual (x_2) com até dois clientes por hora, possibilitando a atuação simultânea de até três profissionais, podendo não haver o serviço, e Coletiva (x_1) com até oito clientes por hora, tendo permissão para atuação concomitante de um a quatro técnicos. Dessa forma, a função Intervenção foi definida como $I(x) = 8x_1 + 2x_2$, e a Treinadores por $T(x) = x_1 + x_2$. Consequentemente, o modelo (V) teve Z(x) como média ponderada, analogamente ao problema anterior.

$$\text{máx } \mathrm{Z(x)} = \frac{\mathrm{I(x)}}{\mathrm{T(x)}} = \frac{8x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2}$$

Sujeito a:

$$(1)\ x_1 + x_2 \leq 5 \qquad \text{(V)}$$
$$(2)\ 1 \leq x_1 \leq 4$$
$$(3)\ 0 \leq x_2 \leq 3$$
$$(4)\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Na ciência disso, a interpretação do problema revelaria que a média seria maximizada quando o maior número possível de treinadores (x_1) desenvolvesse intervenções coletivas. A Restrição (1) indicaria que a solução ótima seria conquistada com o maior valor possível da função I(x), o que dependeria de x_1, observando (2), o máximo permitido seria $x_1 = 4$. Por conseguinte, a consideração conjunta de (1) e (3), originaria os seguintes cenários elegíveis à solução ótima: a) $x_1 = 4$ e $x_2 = 1 \rightarrow Z(x) = \frac{8\,.\,4 + 2\,.\,1}{4+1} = \frac{34}{5} = 6{,}8$; b) $x_1 = 4$ e $x_2 = 0 \rightarrow Z(x) = \frac{8\,.\,4 + 2\,.\,0}{4+0} = \frac{32}{4} = 8{,}0$. Então, a máxima produtividade seria alcançada com a alocação de quatro treinadores em intervenções Coletivas e o abandono das Individuais. Valeria destacar que a eficiência máxima foi identificada, estabelecendo capacidade ociosa, pois, sempre existiria um profissional não alocado em intervenções, podendo ser aproveitado, conforme o modelo organizacional do CTF, como auxiliar em atividades outras, como planejamento ou treinamento do cliente interno (Vidotto, Bentancourt e Bastos, 2015; Karolczak e Souza, 2017; Gonçalves Júnior e Dellagostin, 2024; Cunha *et al*., 2025; Cardoso *et al*., 2025).

O método de Charnes-Cooper, similarmente ao primeiro problema, requisitou as seguintes transformações, $t = \frac{1}{x_1+x_2}, y_1 = t\,.\,x_1$ e $y_2 = t\,.\,x_2$, tornando a função-objetivo $Z(x) = \frac{8x_1+2x_2}{x_1+x_2} = \frac{(8y_1+2y_2)/t}{1/t} = 8y_1 + 2y_2$ e a linearização do modelo (VI), o que tornou y_1, y_2 e t contínuas. Para eliminar y_2, aplicado foi (0), $y_1 + y_2 = 1 \therefore y_2 = 1 – y_1$, em (3), resultando: $y2 \leq 3t \therefore 1 – y_1 \leq 3t \therefore y_1 \geq 1 + 3t$ e $0 \leq y_2 \therefore 0 \leq 1 - y_1 \therefore y_1 \leq 1$. A substituição na função-objetivo, $Z(x) = 8y_1 + 2y_2 = 8y_1 + 2(1 – y_1) = 8y_1 + 2 – 1y_1 = 6y_1 + 2$, possibilitando identificar que a maximização de Z(x) ocorreria no maior valor de y_1. Não ofendo as transformações e na ciência de que $t \geq 2$ (1), então, a associação entre y_1 e t se estabeleceria como $\{\forall t \mid \text{máx}(y_1) = \text{mín}(4t, 1)\}$, gerando o par de situações: a) $4t \leq 1 \therefore t \leq 0{,}25$ e b) $4t > 1 \therefore t > 0{,}25$, ambas válidas (Quadro I).

$$\text{máx } Z(x) = 8y_1 + 2y_2$$

Sujeito a:

$$
\begin{array}{l}
(0)\; y_1 + y_2 = t(x_1 + x_2) = t.\dfrac{1}{t} = 1 \;\therefore y_1 + y_2 = 1 \\
(1)\; x_1 + x_2 \leq 5 \;\; \div (x_1 + x_2) \therefore \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \leq 5.\dfrac{1}{x_1 + x_2} \therefore 1 \leq 5t \\
(2)\; 1 \leq x_1 \leq 4 \;\div (x_1 + x_2) \therefore \dfrac{1}{x_1 + x_2} \leq \dfrac{x_1}{x_1 + x_2} \leq \dfrac{4}{x_1 + x_2} \therefore t \leq y_1 \leq 4t \\
(3)\; 0 \leq x_2 \leq 3 \;\; \div (x_1 + x_2) \therefore \dfrac{0}{x_1 + x_2} \leq \dfrac{x_2}{x_1 + x_2} \leq \dfrac{3}{x_1 + x_2} \therefore 0 \leq y_2 \leq 3t \\
(4)\; y_1, y_2, t \geq 0
\end{array}
\qquad \text{(VI)}
$$

Quadro I: Verificação da Validades dos Opções de *t*.

	t ≤ 0,25	**t > 0,25**
y_1	$y_1 \leq 4t$	$y_1 \leq 1$
Maximizar y_1	$y_1 = 4t$	$y_1 = 1$
Verificações	$y_1 \geq t$, sim $y_1 \geq 1 - 3t \therefore 4t \geq 1 - 3t \therefore 7t \geq 1 \therefore t \geq 1/7 \approx 0{,}143$. Como $t \geq 0{,}20$, sim.	$y_1 \leq 4t$, sim $y_1 \geq t \therefore 1 \geq t$ $y_1 \geq 1 - 3t \therefore 1 \geq 1 – 3t \therefore 0 \geq -3t$, sim

Fonte: Os Autores (2026).

ISSN: 2447-1534

O método revelou que a solução ótima seria Z(x) = 8,00, conquistada com t ≥ 0,25 e y_1 = 1 (Tabela 1), todas seriam contínuas. Porém, x_1 seria o número de profissionais alocados em intervenções Coletivas, logo, obrigatoriamente, natural e $1 \leq x_1 \leq 4$, portanto, alocando um, dois, três ou quatro profissionais na coletividade, a produtividade seria ótima (Tabela 2). A diferença entre as soluções se manifestou, porque, na resolução intuitiva assumiu-se que o número de técnicos na intervenção individual (x_2) seria positivo, mas, pela regra estabelecida poderia ser nulo. A adoção de solução deveria considerar a demanda dos clientes externos, os custos fixos dos profissionais e o nível de ociosidade aceitável, uma vez que, x_1 = 1/h implicaria no atendimento de oito clientes e quatro técnicos ociosos, ao passo que x_1 = 4/h resultaria em 32 clientes e um profissional em ócio. Além disso, nesse estudo foi desconsiderada a necessidade de ofertar intervenções individuais, o que careceu de investigação.

Tabela 1: Demonstração da Solução Ótima pela Transformada de Charnes-Cooper.

t	**y_1**	**Z(x)**
0,20	min(4 . 0,20; 1) = min(0,80; 1) = 1	6 . 0,80 + 2 = 6,80
0,21	0,84	7,04
0,22	0,88	7,28
0,23	0,92	7,52
0,24	0,96	7,76
0,25	1,00	8,00
0,26	1,00	8,00
0,27	1,00	8,00
0,28	1,00	8,00
0,29	1,00	8,00
0,30	1,00	8,00

Fonte: Os Autores (2026).

Tabela 2: Solução Ótima em Convergência à Imposição das Regras de Negócio do CTF.

x_1	**x_2**	**t**	**y_1**	**Z(x)**
4	0	0,25	1,00	8,00
3	0	0,33	1,00	8,00
2	0	0,50	1,00	8,00
1	0	1,00	1,00	8,00

Fonte: Os Autores (2026).

A eficiência de desempenho do competidor foi avaliada considerando somente Valor Técnico (VT(x)) e Risco de Lesão (RL(x)), avaliados em razão da carga horária semanal distribuída entre treino na Areia (x_1) e Preparação Física (x_2). O primeiro não podendo superar 8,00 h/semana e segundo com, pelo menos, 2,00 h/semana, tendo limite de 10

REVISTA PRESENÇA

ISSN: 2447-1534

horas semanais. O VT(x) expressaria o retorno em aprendizado ou condicionamento físico, assim, o CTF estipulou que Areia proporcionaria elevado ganho técnico, enquanto a Preparação Física favoreceria ganhos medianos, atribuído foram os valores 10 e 4, respectivamente, tornando VT(x) = $10x_1 + 4x_2$. O risco de lesão, especialmente pelo desgaste articular, aumentaria na Areia e com aumento de carga externa (Souza *et al*., 2025; Delevatti *et al*., 2025; Dallegrave *et al*., 2026) e na síndrome de treinamento (Bonin, Serafim e Andrade, 2025; Lima, Beck e Maynard, 2025; Rosa *et al*. 2025), nesses casos com elevação de ordem quadrática, situação expressa como RL(x) = $x_1^2 + 0{,}5x_2^2$. Atendendo às exigências, o modelo (VII) se caracterizou como problema de PFQ, tendo RL(x) convexo e VT(x) côncavo (linear), dessarte, a solução foi obtida pelos métodos de busca (intuitivo) e Dinkelbach.

$$\text{máx } \mathrm{Z(x)} = \frac{\mathrm{VT(x)}}{\mathrm{RL(x)}} = \frac{10x_1 + 4x_2}{x_1^2 + 0{,}5x_2^2}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} &(1)\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ &(2)\ x_1 \leq 8 \\ &(3)\ x_2 \geq 2 \\ &(4)\ x_1, x_2 > 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII)}$$

O primeiro método encontrou a solução ótima Z(x) = 1,88 (Tabela 3), ou seja, para cada unidade de Risco de Lesão, o Valor técnico seria 1,88. O aumento do tempo de Areia (x_1) promoveria perdas de desempenho, em x_1 = 8,00 h, de até 29,17% ($\approx\left(1 - \frac{1{,}33}{1{,}88}\right).100{,}00$), efeito similar à elevação das horas dedicadas à Preparação Física, podendo alcançar, perda de, aproximadamente, 41,11% (x_2 = 9,00 h). Essa aparente contradição se apresentaria pelo crescimento quadrático de RL(x), concomitantemente, ao linear de VT(x).

No domínio do treinamento desportivo, os resultados revelaram que o aumento das intervenções em Areia (cenários A, B e C) elevaria o Valor Técnico, porém, o Risco de Lesão cresceria mais velozmente, reduzindo a eficiência de desempenho. No outro extremo, a elevação das intervenções físicas (cenários F, G e H) reduziria o Valor Técnico e Risco de Lesão, culminando na atenuação do desempenho. Valeria destacar que o Cenário H seria ponto de inflexão, informando a presença da síndrome de treinamento, possivelmente, dado que o Risco se elevou (Tabela 3). Em síntese, a solução ótima seria

x_1 = 4,00 h e x_2 = 6,00 h (Cenário E), podendo ser empregada a igualdade de carga horária (Cenário D), porque, a perda de desempenho seria de 0,83%.

Tabela 3: Resultados de Z(x) pelo Método de Busca e Efeito (%).

Cenário	x_1	x_2	VT(x)	RL(x)	Z(x)	Efeito
A	8	2	10 . 8 + 4 . 2 = 88,00	8^2 + 0,50 . 2^2 = 66,00	$\frac{88,00}{66,00}$ = 1,33	29,17
B	7	3	82,00	53,50	1,53	18,57
C	6	4	76,00	44,00	1,73	8,24
D	5	5	70,00	37,50	1,87	0,83
E	4	6	64,00	34,00	1,88	
F	3	7	58,00	33,50	1,73	8,02
G	2	8	52,00	36,00	1,44	23,26
H	1	9	46,00	41,50	1,11	41,11

Fonte: Os Autores (2026).

Para o algoritmo Dinkelbach, definiu-se como tolerância, diferença entre q_{k+1} e q_k, ε = 0,01, e aplicou-se as etapas: a) Iniciar q_0 = 0; b) Respeitando as restrições, resolver máx$\{10x_1 + 4x_2 - q_k(x_1^2 + 0{,}5x_2^2)\}$; c) Obter x^k; d) Calcular $q_{k+1} = \frac{VT(x)}{RL(x)}$; e) Enquanto |F(qk)| > ε, repita. A convergência de *q* foi conquistada em seis iterações (Tabela 4), indicando x_1 = 0,822 h (49,32 ≈ 49 minutos) e x_2 = 2,000 h, ou seja, o modelo penalizou o excesso de treino (pelos termos quadráticos) em prol da eficiência da prescrição, proporcionando Z(x) = 6,06 ($\approx \frac{10\,.0{,}822\, +\, 4\,.2{,}00}{0{,}822^2\, +\, 0{,}5\,.\,2{,}00^2} = \frac{8{,}22\, +\, 8{,}00}{0{,}676\, +2} = \frac{16{,}220}{2{,}676}$), o que ratificaria a perda de desempenho na presença de *overtraining*. O modelo foi limitado pela ausência de tempo mínimo semanal de treino, não obstante, o resultado seria válido e o modelo robusto, pois, o comportamento côncavo, garantindo a existência do ponto de máximo, não foi perdido, na realização de mudanças na disponibilidade de horas distribuídas entre Areia e Preparação Física (Tabela 5). Portanto, consistente e confiável seria afirmar que situações: a) abaixo do ótimo, caracterizadas por poucas horas, resultariam em baixos valor técnico e desempenho; b) no ótimo apresentariam equilíbrio entre valor e risco; e c) acima do ótimo, marcadas por muitas horas, promoveriam alto risco lesivo e baixo desempenho.

Valeria destacas que o último caso seria análogo à Lei dos Rendimentos Decrescentes, comumente presente em Economia e Administração no contexto da produção. Em linhas gerais, a eficiência estimada (Desempenho) seria a produtividade, o Valor Técnico, a produção, e o Risco de Lesão equivaleria ao custo. Isso entendido, então, o competidor teria um ponto ótimo de treino, nesse o retorno por unidade de risco seria máximo. Analogamente, ao fabricante que teria o ponto ótimo de produção, no qual a produtividade seria máxima.

Tabela 4: Iterações do Algoritmo de Dinkelbach.

Iteração	x_1	x_2	q
0	8,000	2,000	1,333
1	3,750	3,000	2,667
2	1,875	2,000	4,850
3	1,031	2,000	5,978
4	0,836	2,000	6,062
5	0,824	2,000	6,075
6	0,822	2,000	6,077

Fonte: Os Autores (2026).

Tabela 5: Resultados de Z(x) pelo Método de Dinkelbach e Efeito (%).

Cenário	x_1	x_2	VT(x)	RL(x)	Z(x)	Efeito
Ótimo	0,82	2	16,20	2,67	6,06	0,00
A’	1,82	2	26,20	5,31	4,93	18,64
B’	2,82	2	36,20	9,95	3,64	40,00
C’	0,82	3	20,20	5,17	3,91	35,58
D’	0,70	2	15,00	2,49	6,02	0,63
E’	0,52	2	13,20	2,27	5,81	4,09
F’	0,50	2	13,00	2,25	5,78	4,69
G’	0,30	2	11,00	2,09	5,26	13,18
H’	0,10	2	9,00	2,01	4,48	26,14

Fonte: Os Autores (2026)

Considerações Finais

O objetivo foi desenvolver modelos de programação fracionária para maximização da taxa de retorno, produtividade e do desempenho de um competidor. Os resultados conquistaram a solução ótima em todos os casos, embora, o método empregado na resolução tenha influenciado a precisão dos pontos de máximo. Isso destacou, contundentemente, a necessidade da adequada interpretação do problema e convergência da resposta encontrada à circunstancialidade corrente. Assim sendo, concluiu-se que o objetivo foi atingido a contento.

As futuras investigações devem realizar a análise de sensibilidade do ROI, dado que o impacto contábil poderia revelar nuances a serem consideradas no investimento em marketing. Considerando que na Organização seja lugar comum o interesse na longevidade, a Taxa Interna de Retorno (TIR) deveria ser considerada nos projetos de longo prazo, como comunicação e vendas. As estimativas precisariam ser refinadas pelo

ISSN: 2447-1534

detalhamento das regras de negócio, o que implicaria em investigar a demanda por intervenções individuais, a existência de limitações (ou gargalos) à atuação, os custos de operação dos serviços e a cultural de capital humano, quanto a ociosidade de clientes internos. A otimização de desempenho deveria ser pesquisada considerando o treinamento técnico, físico, tático e psicológico, assim como, histórico de lesão, condição nutricional e regime de sono.

Referências

ABSENSUR, EO. **Pesquisa operacional para cursos de Engenharia de Produção**. São Paulo: Blucher, 2018.

ARAÚJO JÚNIOR, JB; TAVARES, LAP. Desempenho dos fundos de investimento no Brasil: avaliação multiclasse ajustada ao risco. **Revista Processus de Estudos de Gestão, Jurídicos e Financeiros**, v. 16, n. 51, e511481, 2025.

BONIN, GT; SERAFIM, TT; ANDRADE, A. Mood profiles and overtraining syndrome: a systematic review. **Sport Sciences for Health**, v. 21, n. 4, p. 2445-2466, 2025.

BRITO, DF *et al.* Eficiência do negócio *personal trainer* sob o domínio da análise de envoltória de dados. **Revista Presença**, v. 11, n. 26, p. 262-275, 2025.

CAMBINI, A; CROUZEIX, JP; MARTEIN, L. On the pseudoconvexity of a quadratic fractional function. **Optimization**, v. 51, n. 4, p. 677-687, 2002.

CARDOSO, BH *et al*. Desenvolvimento e transição de habilidades dos trabalhadores para a diversificação industrial inteligente: um estudo de caso para Santa Catarina. **Revista Brasileira de Inovação**, v. 24, e025007, 2025.

CARDOSO, BS; OLIVEIRA, ALL. A utilização dos índices de rentabilidade nas empresas: ROA, ROE, ROI. **Revista Educação em Foco**, v. 15, p. 176-183, 2023.

CHARNES, A; COOPER, WW. Programming with linear fractional functionals. **Naval Research logistics quarterly**, v. 9, n. 3-4, p. 181-186, 1962.

CHARNES, A; COOPER, WW; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. **European Journal of Operational Research**, v. 2, n. 6, p. 429-444, 1978.

COLIN, EC. **Pesquisa operacional**: 170 aplicações em estratégias, finanças, logística, produção, marketing e vendas. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

CUNHA, CM *et al*. Gestão de Recursos Humanos: estratégias para reduzir o turnover e aumentar o engajamento. **Cuadernos de Educación y Desarrollo-QUALIS A4**, v. 17, n. 4, e8103, 2025.

DALLEGRAVE, EJ *et al*. Analysis of tactical-technical sports training tasks based on two macrocycles: a successful case of a professional Brazilian women's handball team. **Retos**, v. 76, p. 812-825, 2026. DOI: https://doi.org/10.47197/retos.v76.117201

DELEVATTI, RS *et al*. Behavior of external and internal load in the exercise training of older adults with cardiovascular risk factors. **Clinical and Biomedical Research**, v. 45, e145792, 2025.

DEY, S; KIM, C; MEHROTRA, S. An algorithm for stochastic convex-concave fractional programs with applications to production efficiency and equitable resource allocation. **European Journal of Operational Research**, v. 315, n. 3, p. 980-990, 2024.

DINKELBACH, W. On nonlinear programming. **Management Science**, v. 13, n. 7, 1967. https://doi.org/10.1287/mnsc.13.7.492

FERREIRA, DHL; PENEREIRO, JC; FUJITA, LH. Eficiência de aterros sanitários: um estudo apoiado na ferramenta de análise envoltória de dados. **Revista Gestão & Sustentabilidade Ambiental**, v. 6, n. 2, p. 154-170, 2017.

GONÇALVES JÚNIOR, JF; DELLAGOSTIN, O. O investimento em capital humano: caminho para o desenvolvimento econômico e social. **Ciência e Cultura**, v. 76, n. 2, p. 01-13, 2024.

HILLIER, ES; LIEBERMAN, GJ. **Introdução à pesquisa operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

HU, C; GAO, Y; GUO, E. Fractional portfolio optimization based on different risk measures in fuzzy environment. **AIMS Mathematics**, v. 10, n. 4, p. 8331-8363, 2025.

ISBELL, JR, WH MARLOW. Attrition games. **Naval Research Logistics Quarterly**, v. 3, n. 1-2, p. 71–93, 1956.

JAGANNATHAN, R. On some properties of programming problems in parametric form pertaining to fractional programming. **Management Science**, v. 12, n. 7, p. 609–615, 1966.

JUNIOR, APS; BONACIM, CAG; JUNIOR, ACP. Aplicação da análise envoltória de dados (DEA) para avaliação de eficiência de usinas de açúcar e álcool da região nordeste do estado de São Paulo. **Organizações Rurais & Agroindustriais**, v. 11, n. 3, p. 494-513, 2009.

KARA, N; KOCKEN, HG; AKDEMIR, HG. A fuzzy approach for the intuitionistic multi-objective linear fractional programming problem using a bisection method. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 49, n. 2, a. 26, 2025.

KAROLCZAK, ME; SOUZA, YS. Recursos humanos para a economia do conhecimento na ótica da teoria do capital humano. **Revista Alcance**, v. 24, n. 1 (Jan-Mar), p. 066-080, 2017.

LETA, FR *et al*. Métodos de melhora de ordenação em DEA aplicados à avaliação estática de tornos mecânicos. **Investigação Operacional**, v. 25, p. 229-242, 2005.

LIMA, FF; BECK, HAP; MAYNARD, DC. A importância da ingestão dos carboidratos por atletas de alta performance em exercícios de endurance. **Research, Society and Development**, v. 14, n. 4, e1614448597, 2025.

MENESES, JGV. Análisis de portafolios de inversión mediante simulación de Monte Carlo en Python: Evaluación del riesgo y rendimiento con acciones mexicanas. **Economía & Negocios**, v. 7, n. 2, p. 14-36, 2025.

MIRANDA, MG. **Análise da eficiência de unidades de negócio do varejo utilizando DEA (*Data Envelopment Analysis*)**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ciência da Computação) – Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação. Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza (CE), 2015.

PATEL, M; BEHERA, J; KUMAR, P. Enhanced interval quadratic fractional programming for maximizing sharpe ratio in portfolio optimization. **International Journal of Applied and Computational Mathematics**, v. 11, n. 4, a. 132, 2025.

POMPERMAYER, FM; SERRANO, ALM; SAIKI, GM. **Construindo benchmarks de custos operacionais de prestação de serviços de água e esgoto nos municípios por meio da análise envoltória de dados**. Brasília (DF): Ipea, set. 2025.

RITTER, K. Ein Verfahren zur Lösung parameterabhängiger, nichtlinearer Maximum-Probleme. **Unternehmensforschung**, B. 6, N. 4, S. 149–166, 1962.

ROSA, ECZ *et al*. Endocrinologia do esporte e do exercício físico: influência da bioquímica hormonal na hipertrofia, metabolismo energético e recuperação muscular: uma revisão de literatura. **Revista Tópicos**, v. 3, n. 23, p. 1-14, 2025. DOI: 10.5281/zenodo.16259242

SARAIVA, JV. **Optimizing power control in centralized and distributed mimo networks: strategies and solutions**. Tese (Doutorado em Engenharia de Teleinformática) - Programa de Pós-graduação em Engenharia de Teleinformática do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará. Fortaleza (CE), 2024.

SILVA, EM *et al*. Análise incremental da Taxa Interna de Retorno (TIR): a maior TIR é sempre melhor? **Revista Foco**, v. 17, n. 8, e6003, 2024.

SOUZA, LCS *et al*. Análise descritiva das variáveis pedagógicas e carga externa das sessões de treino no basquetebol formativo. **E-Balonmano. com: Revista de Ciencias del Deporte**, v. 21, n. 3, p. 383-392, 2025.

STANCU-MINASIAN, IM. **Fractional programming**: theory, methods and applications. Dordrecht (Nederland): Kluwer Academic Publishers, 1999.

VIDOTTO, JDF; BENTANCOURT, SMP; BASTOS, RC. Reflexões sobre a percepção do capital humano nas últimas cinco décadas. **International Journal of Knowledge Engineering and Management**, v. 4, p. 169-187, 2015.

XAVIER, BRF; BONIZIO, RC. Análise de sensibilidade do ROI: um estudo de caso para uma empresa de tecnologia da informação. **Revista Mineira de Contabilidade**, v. 20, n. 2, p. 43-54, 2019.

YOU, L *et al*. Robust online energy efficiency optimization for distributed multi-cell massive MIMO networks. **Science China Information Sciences**, v. 66, n. 3, p. 132302, 2023.

ZAPPONE, A; JORSWIECK, E. Energy efficiency in wireless networks via fractional programming theory. **Foundations and Trends in Communications and Information Theory**, v. 11, n. 3-4, p. 185-396, 2015.

ZHOU, M *et al*. Maximizing the cost-effectiveness of relief prepositioning inventory and funding assurance strategy by integrating stockpiles, supply contract, and insurance. **Risk Analysis**, v. 45, n. 9, p. 2838-2864, 2025.