REVISTA PRESENÇA

ISSN: 2447-1534

OTIMIZAÇÃO DA PROBABILIDADE DE COMPROMETIMENTO NOS JOELHOS PELA PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA

BRASIL, Roxana Macedo[1]; EVERTON, Adriana Nunes da Fonseca[2]; BARRETO, Ana Cristina Lopes y Glória[3]; BRITO, Diogo de Freitas[3;4;5;]; CARVALHO JUNIOR, Sergio[6]; MARINS, Fabrícia França[7]; JUNIOR, Homero da Silva Nahum[3;8]

Resumo

O modelo de programação quadrática foi aplicado com o objetivo de minimizar o risco de lesões articulares de joelho. As soluções do modelo obedeceram aos critérios e às disponibilidades elencados por profissional de Educação Física, cujas prescrições foram comparadas às soluções do modelo para duas mulheres e dois homens, considerando Estatura, Massa Corporal e Percentual de Gordura. Os resultados convergiram às prescrições, tendo sido direcionada, pelo modelo sugestão de menor risco para uma única Cliente, o que não caracterizou divergência. Então, o modelo proposto atendeu satisfatoriamente ao objetivo, sem violação de qualquer restrição.

Palavras-chave: Pesquisa operacional. Modelagem. Saúde. Lesão. Exercício Físico.

Abstract

The quadratic programming model was applied with the objective of minimizing the risk of knee joint injuries. The model's solutions adhered to the criteria and availability listed by an Physical Education professional, whose prescriptions were compared to the model's solutions for two women and two men, considering height, body mass, and body fat percentage. The results converged with the prescriptions, with the model suggesting a lower risk for a single client, which did not constitute a divergence. Therefore, the proposed model satisfactorily met the objective without violating any restrictions.

Keywords: Operations research. Modeling. Health. Injury. Physical exercise.

Introdução

No mundo real, fenômenos lineares seriam a exceção, pois, comumente, haveria alguma não linearidade, a qual, no contexto da Pesquisa Operacional, poderia residir em,

[1] Docente Ph.D. em Educação Física;
[2] Profissional de Educação Física da Adriana Nunes Consultoria de Corrida;
[3] Docentes do Curso de Educação Física do Centro Universitário Celso Lisboa;
[4] Docente do Curso de Gestão Desportiva e do Lazer do Centro Universitário Celso Lisboa;
[5] Consultor Iceberg Business Academy;
[6] Pesquisador convidado Biodesa;
[7] Graduanda do Curso de Educação Física do Centro Universitário Celso Lisboa;
[8] Docente da Escola de Saúde da Universidade Cândido Mendes.

ISSN: 2447-1534

pelo menos, uma restrição ou na função objetivo. Como consequência, à primeira leitura, não seria possível garantir a conquista da solução ótima, essa requisitaria a aplicação do Cálculo Diferencial para caracterizar o comportamento da função, especificamente concavidade e convexidade, equivalendo a identificar os pontos máximos, mínimos e de inflexões (Abensur, 2018).

Para tanto, imperativamente, estudadas seriam as derivadas parciais de segunda ordem, cuja organização se daria pela matriz hessiana (I), a qual seria simétrica de ordem n, utilizada para análise de convexidade quando a função apresentar, pelo menos, três variáveis (Calixto, 2020). Então, calculados seriam os determinantes dos menores principais da matriz hessiana (II). Cada um desses seria o determinante da submatriz *kxk* ($1 \leq K \leq n$) obtida pela remoção de $n - k$ linhas e colunas, denotados por D_1, D_2, ... D_n (Ribeiro, 2008). E, possibilitando, classificar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ conforme o Quadro I (Lachtermacher, 2002).

$$H_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \qquad \text{(I)}$$

$$D_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \qquad \text{(II)}$$

Dada a flexibilidade a programação não linear foi utilizada no setor de energia para avaliar a expansão do sistema de transmissão (Garcia, 2025) e a operação de usinas hidrelétricas na bacia do rio São Francisco (Barbosa, 2020). Assim, como para otimizar a distribuição de água (Rosal, 2007), alocação de *buffers* e servidores (Oliveira, 2025), o controle de plantas daninhas (Stiegelmeier, 2012), gerenciamento de coleta de resíduos sólidos urbanos (Cunha e Caixeta Filho, 2002), risco de retorno de portfólio de ações (Bevilaqua, 2021) e a diversificação do financiamento da seguridade social (Moreno e Martins, 1989). Na área de saúde, o emprego se deu no planejamento da terapia de câncer

ISSN: 2447-1534

por radiocirurgia (Sousa, 2008), enquanto a Educação Física foi contemplada com um estudo de caso sobre a gerência de academia de ginástica (Franqueiro, 2023).

Quadro I: Classificação do Comportamento da Função.

Classificação	Condição Matemática	Semântica
Estritamente Convexa	$D_1 > 0$, $D_2 > 0$, ..., $D_n > 0$	Se todos os determinantes forem positivos para todas as n-uplas do domínio.
Convexa	$D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, ..., $D_n \geq 0$	Se todos os determinantes forem não negativos para todas as n-uplas do domínio.
Estritamente Côncava	$D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, ...	Se os determinantes tiverem sinais alternados.
Côncava	$D_1 \leq 0$, $D_2 \geq 0$, $D_3 \leq 0$, ...	Se os determinantes forem iguais a zero ou tiverem sinais alternados.
Nem Côncava nem convexa	Caso contrário	

Fonte: Adaptado de Abensur (2018).

Quando o fenômeno de interesse apresentar função objetivo quadrática e somente restrições lineares, então a modelagem adequada seria por programação quadrática, mas dependendo da função objetivo (Quadro II), o problema poderia ser de programação convexa (III) ou côncava (IV), desde que o conjunto de soluções viáveis, $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \ (i = 1, \dots, m), h_j(x) = 0 \ (j = 1, \dots, p)\}$, fosse convexo. Logo, irrelevante seria g_i, individualmente, ser convexa ou côncava, mas que cada $\{x: g_i(x) \leq 0\}$ fosse convexo.

Quadro II: Classificação da Programação.

Função Objetivo	Conjunto de Soluções Viáveis	Classificação
Convexa	Convexo	Se minimizar, Programação Convexa
Côncava		Se maximizar, Programação Côncava
Convexa		Se maximizar, Problema Não-convexo.
Côncava		Se minimizar, Problema Não-convexo.

Fonte: Os Autores (2026).

$$
\begin{gathered}
\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\
sujeito\ a\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\
h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p
\end{gathered}
\qquad \text{(III)}
$$

ISSN: 2447-1534

onde: *m*: número de restrições de desigualdade; *p*: número de restrições de igualdade; *i*: índice para desigualdades; *j*: índice para igualdades; *f*: convexa; g_i: convexas; h_j: afins ($h_j(x) = a_j^T x - b_j$); *i* e *j* seriam independentes e pertencentes a intervalos distintos.

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$sujeito\ a\ g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \qquad \text{(IV)}$$

$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p$$

onde: *m*: número de restrições de desigualdade; *p*: número de restrições de igualdade; *i*: índice para desigualdades; *j*: índice para igualdades; *f*: côncava; g_i: convexas; h_j: afins ($h_j(x) = a_j^T x - b_j$); *i* e *j* seriam independentes e pertencentes a intervalos distintos.

O exemplo numérico (Ex) das considerações matemáticas, considerou a programação convexa com quatro desigualdades e uma igualdade, apresentada como problema e na forma padrão. A relevância do exposto residiria no fato de que a combinação entre as características, teoricamente apresentadas, determinaria a convexidade do problema (Quadro III), essa quando convexa indicaria a existência de propriedades teóricas consolidadas. Então, o presente estudo objetivou desenvolver modelo de programação quadrática para minimizar o risco de lesões articulares de joelho.

Ex.: Problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f = x_1^2 + x_2^2$$

$$sujeito\ a \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \quad (g_i) \\ x_1 - x_2 \geq 2 \ \ (g_2) \\ 2x_1 + 3x_2 = 15 \ \ (h_1) \\ x_1, x_2 \geq 0 \ \ (g_3\ e\ g_4) \end{cases}$$

Forma Padrão

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f = x_1^2 + x_2^2$$

$$sujeito\ a \begin{cases} g_1(x) = x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \\ g_2(x) = -x_1 + x_2 + 2 \ \leq 0 \\ h_1(x) = 2x_1 + 3x_2 - 15 \\ g_3(x) = \ -x_1 \leq 0 \\ g_4(x) = \ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Quadro III: Determinação da Convexidade do Problema.

Função Objetivo	Operação	Tipo de Problema	Convexidade
Convexa	Minimização	Programação convexa	Convexa
Côncava	Maximização	Programação côncava	Convexa
Convexa	Maximização	Programação não-convexa	Não-convexa
Côncava	Minimização	Programação não-convexa	Não-convexa
Qualquer outra	Mini/Max	Programação não linear geral	Depende

Fonte: Os Autores (2026).

ISSN: 2447-1534

Metodologia

A modelagem foi desenvolvida na linguagem R 4.3.3, empregando o pacote *quadprog* 1.5-8. Como o objetivo era minimizar o risco de lesão, então o problema era de programação convexa, o que possibilitou a otimização segura. Os exercícios considerados foram Musculação para membros inferiores (S), cuja realização seria obrigatória, porém, opcionais seriam Natação (N), Bicicleta (B), Corrida (R) e Caminhada (W). As variáveis de treinamento foram estabelecidas por profissional de Educação Física, o qual determinou que a Intensidade deveria ser controlada pelo percentual da frequência cardíaca, considerando as seguintes zonas de corte: Z1 – baixa até 59,00%, Z2 – moderada entre 60,00% e 79,00%, e Z3 – alta a partir de 80,00%. Todas as modalidades poderiam ter no máximo cinco sessões semanais, mas a musculação, pelo menos, duas sessões no mesmo período, com quantidade de séries entre seis e 14. Enquanto, os exercícios aeróbicos deveriam ter duração entre 20 min e 90 min. As soluções do modelo deveriam ser comparadas às prescrições realizadas preventivamente para duas mulheres, F1 e F2, e dois homens, M1 e M2 (Quadro IV) , considerando Estatura (h_i), Massa Corporal (m_i) e Percentual de Gordura (g_i).

Quadro IV: Clientes sem Lesão de Joelho para Teste do Modelo

Indivíduo	Idade, anos	Estatura, m	Massa Corporal, Kg	Gordura, %
F1	40	1,65	70	0,32
F2	52	1,70	80	0,36
M1	41	1,75	82	0,22
M2	56	1,80	95	0,28

Fonte: Os Autores (2026).

Resultados e Discussão

Inicialmente, imperativo foi determinar as variáveis de decisão por Indivíduos (*i*), Exercícios (*e*) e Intensidade (*z*), essa codificada como constante, resultando em $I_z \in \{I_{z1}, I_{z2}, I_{z3}\}$, cujo fator de intensidade foi obtido pela normalização das frequências cardíacas planejadas para clientes com objetivo similar ao do estudo corrente, sequencialmente foram estimadas as médias relativas de Z_2 e Z_3 em relação à Z_1, culminando em Z_1 = 1,00, Z_2 = 1,60 e Z_3 = 2,30. A frequência foi tomada pelo número de sessões/semana, $f_{i,e,z} \geq 0 \in \mathbb{R}$. O volume por sessão considerou a quantidade de minutos para as modalidades aeróbicas (T_i *(min)*), e o número de séries para a musculação

REVISTA PRESENÇA
ISSN: 2447-1534

$(S_i^{máx}(séries))$, $v_{i,e,z} \geq 0 \in \mathbb{R}$. Isso possibilitou estabelecer a dose semanal expressa por $d_{i,e,z} = f_{i,e,z} \,.\, v_{i,e,z} \,.\, I_z$.

Referente à Musculação, a pesquisa literária (Jordão *et al.*, 2022; Cunha *et al.*, 2025) forneceu o Fator de Proteção (ou Fator de Estabilização), tratar-se de coeficiente de interação protetiva, ou seja, reduziria o risco marginal até determinado limite, tendo sido fixado como p_S = 0,35. Para garantir a coerência do modelo com a distribuição cartesiana de forças, para cada modalidade foi obtido o fator de carga patelofemoral (c_e, adimensional), o qual expressaria a quantidade de força e pressão sobre a articulação homônima, essa determinante da estabilidade da estrutura, particularmente, nos movimentos de flexão e extensão (Machado, 2006; Souza *et al.*, 2016). A relevância de tal consideração faria morada no domínio biomecânico, pois consideraria as forças exercidas pelo reto femoral e pelos vastos medial, intermediário e lateral, e a área de contato entre o fêmur e a patela. Essa limitada geométrica, poderia não aumentar proporcionalmente à força exercida, particularmente, em corridas, saltos, agachamentos (especialmente profundos) e escadas (subida e descida). Como consequência, a pressão (força perpendicular por unidade de área) sobre a articulação se elevaria significativamente na flexão de joelhos (Mata, 2009; Machado *et al.*, 2012; Malta e Pacheco, 2017; Brelaz, Oliveira e Barbosa, 2020). Então, nessa investigação empregou-se c_W = 0,80, c_R = 1,40, c_B = 0,90, c_N = 0,70 e c_S = 1,20.

A determinação do volume semanal de treinamento obedeceu a disponibilidade dos voluntários declarada em entrevista, resultando para os exercícios aeróbicos em T_{F1} = 320 min/sem, T_{F2} = 300 min/sem, T_{M1} = 340 min/sem e T_{M2} = 300 min/sem, e para a Musculação em $S_{F1}^{máx} = 36$ séries/sem, $S_{F2}^{máx} = 32$ séries/sem, $S_{M1}^{máx} = 40$ séries/sem e $S_{M2}^{máx} = 36$ séries/sem. Na ciência de que o objetivo não era desempenho, mas redução do risco de comprometimento, e o público formado por praticantes de exercícios físicos, não atletas de alto desempenho, adotou-se a punição para Z_3, essa tática limitou a alta intensidade, estabelecendo a máxima fração do tempo total naquela intensidade (α_i), logo, α_{F1} = 0,18, α_{F2} = 0,15, α_{M1} = 0,20 e α_{M2} = 0,15.

A função de risco convexa individual, não violando o Princípio da Individualidade Biológica, foi composta pelos termos linear (V) e de curvatura (VI), respectivamente, a carga e sensibilidade ao excesso, ambos modulados pela antropometria (VII). Para a convexidade, a função objetivo foi relaxada com a adoção de variável de folga e restrições lineares (VIII), dessa forma $b_i > 0$ e P_i sendo variável limitada por inequações lineares, a função objetivo convexa estaria garantida (IX).

ISSN: 2447-1534

$$L_i = \sum_{e\in\{W,R,B,N,S\}} \sum_{z\in\{Z_1,Z_2,Z_3\}} c_e . d_{i,e,z} \quad \text{(V)}$$

$$\text{Proteção de Musculação: } P_i = min\left(0{,}015 \sum_z d_{i,S,z}, \gamma\right) \quad \text{(VI)}$$

γ = 0,20, limite do efeito protetivo.

$$Fator_i = m_i . (1 + 0{,}60 g_i) . \left(\frac{1{,}75}{h_i}\right) \quad \text{(VII)}$$

$$\text{Risco Quadrático: } R_i = a_i . L_i + b_i . L_i^2 - \theta_i . P_i$$

$$\text{com } a_i = 0{,}002. Fator_i;\ b_i = 1{,}6 . 10^{-6} . Fator_i;\ \theta_i = 0{,}90 \quad \text{(VIII)}$$

$$min \sum_i R_i \quad \text{(IX)}$$

O modelo completo de programação de quadrática envolveria as variáveis auxiliares para proteção de Musculação, restrições por indivíduo e a função objetivo expandida por indivíduo, tendo todas as restrições como lineares e a função quadrática separável em L_i^2. A aplicação no quarteto proposto demandou a obtenção dos fatores individuais (Tabela 1) para definição de frequência, volume e intensidade por modalidade para cada indivíduo (Tabela 2).

Variáveis auxiliares para proteção

Dose total de Musculação $\quad D_i^S = \sum_z d_{i,S,z}$

Proteção efetiva $\quad P_i \geq 0$ com restrições:

$P_i \leq \beta . D_i^S$

$P_i \leq \gamma$

Restrições por indivíduo

Tempo aeróbico semanal $\quad \sum_{e\in\{W,R,B,N,S\}} \sum_{z\in\{Z_1,Z_2,Z_3\}} f_{i,e,z} . dv_{i,e,z} \leq T_i$

Séries de Musculação $\quad \sum_z f_{i,S,z} \cdot v_{i,S,z} \leq S_i^{\max}$

Intensidade Z_3 limitada (aeróbico) $\quad \sum_{e\in\{W,R,B,N\}} f_{i,e,Z3} \cdot v_{i,e,Z3} \leq \alpha_i \cdot T_i$

Musculação (mínimo semanal)	$\sum_z f_{i,S,z} \geq 2$
Volumes mínimos/realistas por sessão	$v_{i,e,z} \in [20,90]$ min para W/R/B/N, $v_{i,S,z} \in [6,14]$ séries
Frequências por modalidade	$f_{i,e,z} \in [0,4]$ sessões/sem por z, $\sum_z f_{i,e,z} \leq 5$
Recuperação da Musculação	$\sum_z f_{i,S,z} \leq 3$
Não Negatividade	$f_{i,e,z} \geq 0, v_{i,e,z} \geq 0$
Função objetivo expandida	$L_i = \sum_{e,z} c_e \cdot f_{i,e,z} \cdot v_{i,e,z} \cdot I_z$ $R_i = a_i \cdot L_i + b_i \cdot L_i^2 - \theta_i \cdot P_i$ $\min \sum_i (a_i L_i + b_i L_i^2 - \theta_i P_i)$

Tabela 1: Cálculo do Fator por Indivíduo pela Aplicação de (VII)

i	m	g	h	Fator	a	b
F1	70,00	0,32	1,65	$70(1 + 0{,}60.032)\frac{1{,}75}{1{,}65} = 88{,}50$	0,002.88,50 = 0,18	$1{,}6.10^{-6}.88{,}50 = 1{,}42.10^{-4}$
F2	80,00	0,36	1,70	100,14	0,20	$1{,}60.10^{-4}$
M1	82,00	0,22	1,75	92,82	0,19	$1{,}49.10^{-4}$
M2	95,00	0,28	1,80	107,88	0,22	$1{,}73.10^{-4}$

Fonte: Os Autores (2026).

As soluções do modelo (Tabela 2) se concentraram em intensidades baixa (Z_1) ou moderada (Z_2), privilegiando Natação, Caminhada e Bicicleta, pois apresentariam menores cargas articulares. A Corrida foi considerada em Z_2 somente para M1 (Gordura, % = 0,22; IMC, kg/m^2 = 26,78), entendida a modalidade como necessária ao objetivo. Isso, porque, praticantes com maior Massa Corporal ou Percentual de Gordura e menor Estatura apresentariam maiores a_i e b_i, levando o modelo a priorizar Natação ou Bicicleta em detrimento da Corrida ou Alta Intensidade (Z_3).

Tabela 2: Proposta de Musculação (S, número de séries), Caminhada (W, min), Bicicleta (B, min), Natação (N, min) e Corrida (R, min): frequência (f), volume (v), intensidade (z) e dose (D).

e	F1	F2	M1	M2
S	$f_{s,z2} = 2$; $v_{s,z2} = 12$ $f_{s,z1} = 1$; $v_{s,z1} = 8$	$f_{s,z2} = 2$; $v_{s,z2} = 11$ $f_{s,z1} = 1$; $v_{s,z1} = 7$	$f_{s,z2} = 2$; $v_{s,z2} = 13$ $f_{s,z1} = 1$; $v_{s,z1} = 8$	$f_{s,z2} = 2$; $v_{s,z2} = 12$ $f_{s,z1} = 1$; $v_{s,z1} = 7$

ISSN: 2447-1534

	$D^S = 2.12.1,6 + 1.8.1,0 = 46,40$	$D^S = 42,20$	$D^S = 49,60$	$D^S = 45,40$
W	$f_{w,z1} = 2$; $v_{w,z1} = 45$	$f_{w,z1} = 2$; $v_{w,z1} = 45$	$f_{w,z1} = 1$; $v_{w,z1} = 40$	$f_{w,z1} = 2$; $v_{w,z1} = 40$
B	$f_{B,z2} = 1$; $v_{B,z2} = 50$	$f_{B,z2} = 1$; $v_{B,z2} = 45$	$f_{B,z2} = 2$; $v_{B,z2} = 45$	$f_{B,z2} = 1$; $v_{B,z2} = 40$
N	$f_{N,z1} = 1$; $v_{N,z1} = 40$	$f_{N,z1} = 1$; $v_{N,z1} = 40$	$f_{N,z1} = 1$; $v_{N,z1} = 40$	$f_{N,z1} = 1$; $v_{N,z1} = 40$
R	$f_{R,zi} = 0$	$f_{R,zi} = 0$	$f_{R,z2} = 1$; $v_{R,z2} = 30$	$f_{R,zi} = 0$

Fonte: Os Autores (2026).

O termo quadrático ($b_i L_i^2$) evitou a concentração em modalidade aeróbica única e volume semanal extremo. Quanto à Musculação, o risco foi reduzido sem elevação, matematicamente, significativa de L_i, como consequência da proteção P_i até o teto γ (Tabela 3), substancializada em duas ou três sessões semanais com a realização de sete a 13 séries. Em última análise, o modelo não violou a obrigatoriedade da Musculação ou recuperação dela, manteve a Proteção saturada (P_i = 0,20) e não extrapolou o Tempo disponível de qualquer Cliente. Esses resultados convergiram às prescrições realizadas pelo profissional, conforme as avaliações do próprio, exceto para F1, cujo Risco pela solução do modelo foi inferior. Essa ocorrência se manifestou, pois o resultado foi próximo ao ótimo, dada a penalidade imposta pelo termo quadrático à concentração de carga, à vista disso, a proteção articular foi conquistada pela musculação e priorização de volumes e intensidades moderados.

Tabela 3: Análise das Propostas pela Aplicação de (V), (VI) e (VIII).

		F1	**F2**	**M1**	**M2**
Tempo Aeróbico		$2 . 45 + 1 . 50 + 1 . 40 = 180 \leq 320$	$175 \leq 300$	$200 \leq 340$	$160 \leq 300$
Proteção		$P \leq \min(0,015 . 46,40; 0,20) = 0,20$	0,20	0,20	0,20
Carga Total					
	W	0,80 (2 . 45 . 1,0) = 72,00	72,00	32,00	64,00
	B	0,90 (1. 50 . 1,6) = 72,00	64,80	129,60	57,60
	N	0,70 (1. 40 . 1,0) = 28,00	28,00	28,00	28,00
	R			67,20	
	S	1,20 . 46,40 = 55,68	50,64	59,52	54,98
	L	227,68	215,44	316,22	204,08
Risco		$R \approx 0,18 . 227,68 + 1,44.10^{-4} . 227,68^2 - 0,90 . 0,20 \approx 48,27$	50,43	72,54	50,16

Fonte: Os Autores (2026).

Imperativamente, o entendimento sobre Risco deveria ser como índice relativo, jamais como percentual, porque, a escala de *R* seria função convexa da Carga semanal (*L*) com ajuste pela Massa corporal, Estatura e percentual de Gordura, subtraído o efeito protetivo da Musculação. Portanto, quanto maior o acúmulo de sobrecarga sobre os joelhos, maior o valor de *R*. Assim, a prescrição poderia ser considerada conservadora, se R $\in$

REVISTA PRESENÇA

ISSN: 2447-1534

[30,00; 40,00], porque o Risco seria baixo. Porém, R > 70,00% indicaria pouca prática de Musculação ou excesso de Volume ou Intensidade nos exercícios aeróbicos, dado que o risco estaria elevado. O modelo proporcionou $R_{F1} \approx 48{,}27$, $R_{M2} \approx 50{,}16$, $R_{F2} \approx 50{,}43$ e $R_{M1} \approx 72{,}54$, indicando equilíbrio para os três primeiros Clientes (Risco intermediário), conquistado pelo teto de proteção na Musculação, Corrida em Alta Intensidade evitada e Tempo total de exercícios aeróbicos abaixo do limite superior individual. Esse quadro favoreceu a semelhança entre M2 e as mulheres, o que não foi acompanhado pela proposta para M1, a qual apresentou mais cargas em Corrida e Bicicleta, dada a menor Idade frente ao M2.

Mantendo o teto de proteção na Musculação para proporcionar estabilidade e suporte aos joelhos, possível seria ajustar a proposta para M1, aumentando o Volume de Caminhada e Natação em Z_1, retirando Corrida e alterando a prática de Bicicleta de Z_2 para Z_1 (Tabela 3). A nova meta seria não comprometer o estímulo cardiorrespiratório, simultaneamente à mitigação da carga articular. Como resultado, $R_{M1} = 55{,}46$, indicando o equilíbrio da nova proposta, equivalendo a considerar o risco como moderado (Tabela 4).

Tabela 3: Ajuste na Proposta para M1 de Musculação (número de séries), Caminhada (min), Bicicleta (min), Natação (min) e Corrida (min): frequência (f), volume (v), intensidade (z) e dose (D).

Modalidade	M1
Musculação	$f_{s,z2} = 2$; $v_{s,z2} = 13$
	$f_{s,z1} = 1$; $v_{s,z1} = 8$
	$D^S = 2 \,.\, 13 \,.\, 1{,}6 + 1 \,.\, 8 \,.1{,}0 = 49{,}60$
Caminhada	$f_{w,z1} = 2$; $v_{w,z1} = 45$; $T_W = 2 \,.\, 45 = 90$
Bicicleta	$f_{B,z2} = 1$; $v_{B,z2} = 45$; $T_B = 1 \,.\, 45 = 45$
Natação	$f_{N,z1} = 2$; $v_{N,z1} = 40$; $T_N = 2 \,.\, 40 = 80$
Corrida	$f_{R,zi} = 0$

Fonte: Os Autores (2026).

Tabela 4: Análise da Proposta Ajustada para M1 pela Aplicação de (V), (VI) e (VIII).

		M1
Tempo Aeróbico		$2 \,.\, 45 + 1 \,.\, 45 + 2 \,.\, 40 = 215 \leq 340$
Proteção		$P \leq \min(0{,}015 \,.\, 46{,}40;\, 0{,}20) = \min(0{,}744;\, 0{,}20) = 0{,}20$
Carga Total		
	W	$0{,}80\ (2 \,.\, 45 \,.\, 1{,}0) = 72{,}00$
	B	$0{,}90\ (1.\ 45 \,.\, 1{,}6) = 64{,}80$
	N	$0{,}70\ (2.\ 40 \,.\, 1{,}0) = 56{,}00$
	R	
	S	$1{,}20 \,.\, 49{,}60 = 59{,}52$
	L	$72{,}00 + 64{,}80 + 56{,}00 + 59{,}52 = 252{,}32$
Risco		$R \approx 0{,}18 \,.\, 252{,}32 + 1{,}49.10^{-4} \,.\, 252{,}32^2 - 0{,}90 \,.\, 0{,}20 \approx 55{,}46$

Fonte: Os Autores (2026).

ISSN: 2447-1534

Comparativamente, o Ajuste' foi realizado acrescentando uma única sessão de Corrida por 30 min em Z_1 (Tabela 5), tornando R_{M1} = 66,53 (Tabela 6). A modalidade, mesmo com execução em Z_1, impôs carga significativa sobre as articulações estudadas, portanto, deveria ser substituída pelas demais ou evitada, por homem com 82,00 kg, 1,75 m e, aproximadamente, 22,00% de gordura corporal, desde que o objetivo fosse minimizar o comprometimento de joelhos, mantendo moderado o risco advindo da prática de exercícios físicos.

Tabela 5: Ajuste' na Proposta para M1 de Musculação (número de séries), Caminhada (min), Bicicleta (min), Natação (min) e Corrida (min): frequência (f), volume (v), intensidade (z) e dose (D).

Modalidade	**M1**
Musculação	$f_{s,z2} = 2$; $v_{s,z2} = 13$
	$f_{s,z1} = 1$; $v_{s,z1} = 8$
	$D^S = 2 . 13 . 1{,}6 + 1 . 8 .1{,}0 = 49{,}60$
Caminhada	$f_{w,z1} = 2$; $v_{w,z1} = 45$; $T_W = 2 . 45 = 90$
Bicicleta	$f_{B,z2} = 1$; $v_{B,z2} = 45$; $T_B = 1 . 45 = 45$
Natação	$f_{N,z1} = 2$; $v_{N,z1} = 40$; $T_N = 2 . 40 = 80$
Corrida	$f_{R,zi} = 1$; $v_{R,zi} = 30$; $T_R = 1 . 30 = 30$

Fonte: Os Autores (2026).

Tabela 6: Análise da Proposta Ajustada' para M1 pela Aplicação de (V), (VI) e (VIII).

		M1
Tempo Aeróbico		$2 . 45 + 1 . 45 + 2 . 40 + 1 . 30 = 245 \leq 340$
Proteção		$P \leq \min(0{,}015 . 49{,}60; 0{,}20) = \min(0{,}744; 0{,}20) = 0{,}20$
Carga Total		
	W	$0{,}80 (2 . 45 . 1{,}0) = 72{,}00$
	B	$0{,}90 (1. 45 . 1{,}6) = 64{,}80$
	N	$0{,}70 (2. 40 . 1{,}0) = 56{,}00$
	R	$1{,}40 (1 . 30 . 1{,}0) = 42{,}00$
	S	$1{,}20 . 49{,}60 = 59{,}52$
	L	$72{,}00 + 64{,}80 + 56{,}00 + 42{,}00 + 59{,}52 = 294{,}32$
Risco		$R \approx 0{,}18 . 294{,}32 + 1{,}49.10^{-4} . 294{,}32^2 – 0{,}90 . 0{,}20 \approx 66{,}53$

Fonte: Os Autores (2026).

No contexto de políticas públicas para a saúde, propostas otimizadas poderiam ser obtidas por ajustes em T_i, α_i e $S_i^{máx}$, considerando a dicotomia sexual, região de domicílio, faixa etária ou demais características demográficas, sociais ou econômicas, garantindo a Musculação e convergindo às modalidades disponíveis, sem ignorar a segurança ou as condições de impacto, em última análise significaria escalonar em razão das circunstancialidades. As características antropométricas e possível regime de dor articular poderiam ser considerados pela calibração de a_i e b_i, o que exigiria monitoramento populacional. Maiores níveis de atenção seriam demandados pelo limite de Z_3, pois na ocorrência de elevada idade ou alto IMC, por exemplo, necessário seria reduzir α, simultaneamente ao aumento da prática de Musculação. Esses ajustes delicados favoreceriam a obtenção de propostas personalizadas e seguras, porque, no modelo a convexidade garantiria o ótimo global.

Considerações Finais

O estudo objetivou desenvolver um modelo de programação quadrática para minimizar o risco de lesões articulares de joelho. Os resultados convergiram às prescrições realizadas por profissional de Educação Física, tendo sido direcionada, pelo modelo, a uma Cliente sugestão de menor risco. Então, o modelo proposto atendeu satisfatoriamente ao objetivo, sem violação de qualquer restrição.

Recomenda-se, adaptá-lo às ações de políticas públicas voltadas à saúde. A comparação estatística do risco estimado por modelo e profissional, utilizando banco de dados com indivíduos com diversas características antropométricas, distintos acessos às modalidades e diferentes disponibilidades fornecerá métricas de confiabilidade e eficiência. Considerar outras modalidades e medidas, por exemplo comprimento de membros inferiores e perimetria óssea poderia favorecer o refinamento do modelo.

Referências

ABENSUR, EO. **Pesquisa operacional para cursos de Engenharia de Produção**. São Paulo: Blucher, 2018.

ALMEIDA, JFS; MORAIS, EC; CHASE, OA. **Programação matemática:** otimização linear e não linear. Belo Horizonte (MG): Dialética, 2021.

BARBOSA, AG. **Análise da influência dos períodos críticos na operação otimizada do sistema de usinas hidrelétricas da bacia do rio São Francisco utilizando programação não linear**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão (SE), 2020.

BEVILAQUA, NS. **Otimização do risco retorno de um portfolio de ações utilizando a programação binária**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção. Faculdade de Tecnologia. Universidade Federal do Amazonas, Manaus (AM), 2021.

BRELAZ, HL; OLIVEIRA, HKD; BARBOSA, RSP. Alterações biomecânicas na articulação do joelho relacionado à síndrome da dor da patelofemoral. **Revista Cathedral**, v. 2, n. 4, p. 74-81, 2020.

CALIXTO, AO. **Métodos de otimização aplicados à estatística**. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Programa de Pós-graduação em Estatística. Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2020.

ISSN: 2447-1534

CUNHA, V; CAIXETA FILHO, JV. Gerenciamento da coleta de resíduos sólidos urbanos: estruturação e aplicação de modelo não-linear de programação por metas. **Gestão & Produção**, v. 9, n. 2, p. 143-161, 2002.

CUNHA, WLO *et al*. Lesões musculoesqueléticas em corredores de rua: prevalência e fatores associados. **RBPFEX - Revista Brasileira de Prescrição e Fisiologia do Exercício**, v. 19, n. 121, p. 366-375, 2025.

FRANQUEIRO, LG. **O uso da pesquisa operacional na gestão de uma academia: um estudo de caso**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Gestão da Informação) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023.

GARCIA, HCZ. **Planejamento da expansão de sistemas de transmissão usando estratégia de redução de espaço de busca**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Ilha solteira (SP), 2025.

JORDÃO, GS *et al*. Treinamento de força como fator de proteção contra lesões: percepção de praticantes de musculação. **Research, Society and Development**, v. 11, n. 3, e36211326638, 2022.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

MACHADO, SM *et al.* Análise biomecânica dos extensores e flexores do joelho por meio do dinamômetro isocinético em praticantes de artes marciais. **Revista Univap**, v. 18, n. 31, p. 5–12, 2012.

MACHADO, YF. **A análise biomecânica das lesões de joelho no ballet clássico profissional**: uma revisão bibliográfica. Trabalho de Conclusão (Bacharelado em Fisioterapia) - Centro Universitário São Camilo. São Paulo, 2006.

MALTA, MS; PACHECO, QJF. **Biomecânica do joelho durante o exercício de agachamento dinâmico**: revisão narrativa. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Fisioterapia) – Faculdade de Educação Física e Fisioterapia. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia (MG), 2017.

MATA, HTC. **Estudo biomecânico da articulação do joelho**. Dissertação (Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia. Universidade do Porto. Porto (Portugal), 2009.

MORENO, AO; MARTINS, AMV. Diversificação da base de financiamento da seguridade social. **Previdência em Dados**, v. 4, n. 3, p. 5-12, 1989.

OLIVEIRA, MC. **Alocação ótima de buffers e servidores em redes de filas Markovianas por enxame de partículas**. Monografia (Bacharelado em Estatística) – Departamento de Estatística. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto (MG), 2025.

RIBEIRO, MC. **Sombra e convexidade de superfícies**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) – Departamento de Matemática. Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte (MG), 2008.

ROSAL, MCF. **Programação não-linear aplicada à otimização de redes pressurizadas de distribuição de água**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal de Pernambuco. Recife (PE), 2007.

SOUSA, PC. **Programação linear no planejamento do tratamento de câncer por radiocirurgia**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física Médica) - Instituto de Biociências de Botucatu. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Botucatu (SP), 2008.

SOUZA, TMM *et al*. Aspectos biomecânicos do exercício agachamento profundo relacionados à articulação do joelho. **Revista Científica UNIFAGOC-Saúde**, v. 1, n. 2, p. 18-24, 2016.

STIEGELMEIER, EW. **Modelo de otimização para o controle de plantas daninhas usando programação não linear inteira mista**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos (SP), 2012.